Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2014-2015, sessione invernale, III appello
Corso prof. Omari

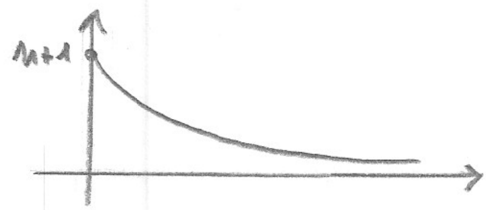
COGNOME ______________________	NOME ______________________
N. Matricola ______________________	Anno di corso ______________________
Corso di Studi: **Ingegneria Industriale** ○	**Ingegneria Navale** ○

ESERCIZIO N. 1. Si ponga, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \dfrac{1+n}{1+n^3\sqrt{x}}$.

(*i*) Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ fissato, si studi la funzione $f_n(x)$. Per ogni $n \geq 1$:

$f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$; $f_n(x) > 0$, $\forall x \geq 0$; $f_n(0) = n+1$; $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$;

f_n decrescente



(*ii*) Si determini l'insieme di convergenza puntuale della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

• Per ogni $x > 0$ fissato, $\text{ord}_{+\infty} f_n(x) = 2$ e quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge.

• Poiché $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = +\infty$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0)$ non converge.

(*iii*) Si provi che, per ogni $a > 0$, la serie converge uniformemente su $[a, +\infty[$. Per ogni n,

$\sup_{x\geq a} |f_n(x)| = f_n(a) =: M_n$, con $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ convergente, e quindi, per il test di Weierstrass, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente su $[a,+\infty[$.

(*iv*) Si provi che la serie non converge uniformemente su $]0, +\infty[$. Per ogni n,

$\sup_{x>0} |f_n(x)| = n+1$ e quindi $(f_n)_n$ non tende a 0 uniformemente in $]0,+\infty[$. Dunque $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ non converge uniformemente in $]0,+\infty[$.

ESERCIZIO N. 2. Si ponga $f(x,y) = \int_x^y \arctan(t^2+t-2)\,dt.$

(*i*) Si calcoli il gradiente di f.

$\nabla f(x,y) = \left(-\arctan(x^2+x-2),\ \arctan(y^2+y-2)\right)^T$

(*ii*) Si calcoli la matrice Hessiana di f.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2x+1}{1+(x^2+x-2)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{2y+1}{1+(y^2+y-2)^2} \end{pmatrix}$$

(*iii*) Si determinino i punti critici di f.

$\nabla f(x,y) = \underline{0} \iff \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ y^2+y-2=0 \end{cases}$; $z^2+z-2=0 \iff z_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

$(1,1)^T$; $(1,-2)^T$; $(-2,1)^T$; $(-2,-2)^T$

(*iv*) Si studi la natura dei punti critici di f.

$Hf(1,1)$ indefinita : $(1,1)^T$ pto di sella ;

$Hf(-2,-2)$ indefinita ; $(-2,-2)^T$ pto di sella ;

$Hf(1,-2)$ definita negativa : $(1,-2)^T$ pto di max;

$Hf(-2,1)$ definita positiva : $(-2,1)^T$ pto di min.

(*v*) Si calcolino $\inf_{\mathbb{R}^2} f$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} f$. Per il teorema della media integrale,

$f(x,2x) = x\cdot\arctan(\xi^2+\xi-2)$ con ξ compreso tra x e $2x$;

$f(x,2x)\to+\infty$ se $x\to+\infty$ e $f(x,2x)\to-\infty$ se $x\to-\infty$;

$\sup f = +\infty$; $\inf f = -\infty$.

(*vi*) Si determini il piano tangente al grafico di f nel punto $\left(-\frac{1+\sqrt{13}}{2}, -\frac{1+\sqrt{13}}{2}, 0\right)^T$.

$f\left(-\frac{1+\sqrt{13}}{2}, -\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) = 0$; $\nabla f\left(-\frac{1+\sqrt{13}}{2}, -\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)^T$;

$z = \frac{\pi}{4}\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\left(y+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

COGNOME e NOME ____________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli la circuitazione del campo vettoriale

$$g(x,y) = (1 - y^2 + \sin x, 1 + x^2 + \cos y)^T$$

lungo la frontiera del dominio

$$D = \{(x,y)^T : \sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{2+y^2},\ |y| \le 1\}.$$

RISULTATO

$$\frac{10}{3}$$

SVOLGIMENTO

Per il teorema del rotore,

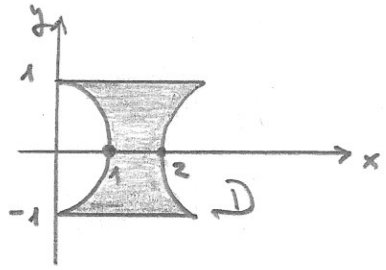
$$\int_{+\mathrm{fr}\,D} \langle g, \tau \rangle\, ds = \iint_D \langle \mathrm{rot}\, g, \underline{e}_3 \rangle\, dx\, dy =$$

$$= \iint_D (2x + 2y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{2+y^2}} 2(x+y)\, dx \right) dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(2 + y^2 - 1 + y^2 - y\sqrt{2+y^2} + y\sqrt{1-y^2} \right) dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} (1 + 2y^2)\, dy = 2\left[y + \frac{2}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{10}{3}$$



ESERCIZIO N. 4. Si indichi con $y_a(\cdot)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 - 2y \\ y(0) = a, \end{cases}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

(*i*) Si determini la soluzione $y_a(\cdot)$ per

• $a = 0$:

$y_0(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• $a = 2$:

$y_2(x) = 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• $a = 1$:

$\forall x \in \operatorname{dom} y_1(\cdot), \quad 0 < y_1(x) < 2 \quad$ e

$$x = \int_0^x \frac{y_1'(t)}{y_1^2(t) - 2y_1(t)}\,dt = \int_1^{y_1(x)} \frac{1}{s^2 - 2s}\,ds = \int_1^{y_1(x)} \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-2}\right)ds$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{2-s}{s}\right)\right]_0^{y_1(x)} = \ln\sqrt{\frac{2-y_1(x)}{y_1(x)}} \iff$$

$$\frac{2-y_1(x)}{y_1(x)} = e^{2x} \iff y_1(x) = \frac{2}{1+e^{2x}} \ ;$$

$\operatorname{dom} y_1(\cdot) = \mathbb{R} \quad$ e $\quad y_1(x) = \dfrac{2}{1+e^{2x}}$

(*ii*) Si provi che, per ogni $a \in]0, 2[$, la soluzione $y_a(\cdot)$ è limitata e decrescente.

Per il teorema di unicità, $0 < y_a(x) < 2, \ \forall x \in \operatorname{dom} y_a(\cdot)$, e quindi, dall'equazione, $y_a'(x) < 0, \ \forall x \in \operatorname{dom} y_a(\cdot)$

(*iii*) Si provi che, per ogni $a \in]0, 2[$, la soluzione $y_a(\cdot)$ è definita su $\mathbb{R}$.

Per il lemma di prolungamento, $\operatorname{dom} y_a(\cdot) = \mathbb{R}$.