Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2014-2015, sessione estiva, I appello
Corso prof. Omari

COGNOME ______		NOME ______	
N. Matricola ______		Anno di corso ______	
Corso di Studi:	Ingegneria Industriale ○	Ingegneria Navale ○	

ESERCIZIO N. 1. Si definisca, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ponendo $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx) - i\cos(nx)}{n!}$.

(i) Si determini l'insieme di convergenza puntuale della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$|f_n(x)| = \frac{\sqrt{\cos^2(nx) + \sin^2(nx)}}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

Poichè $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ converge, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge assolutamente in $\mathbb{R}$.

(ii) Si determini l'insieme di convergenza uniforme della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$ per il criterio di Weierstrass, avendo posto

$M_n = \frac{1}{n!}$.

(iii) Si calcolino la parte reale, la parte immaginaria e il modulo della somma della serie.

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -i\,\frac{(e^{ix})^n}{n!} = -i\left(e^{e^{ix}} - 1\right) =$$

$$= -i\left(e^{\cos x + i\sin x} - 1\right) = -i\left(e^{\cos x}\cos(\sin x) + i\,e^{\cos x}\sin(\sin x) - 1\right)$$

$$= e^{\cos x}\sin(\sin x) + i\left(1 - e^{\cos x}\cos(\sin x)\right)$$ e quindi

$\mathrm{Re}(s(x)) = e^{\cos x}\sin(\sin x)$, $\mathrm{Im}(s(x)) = 1 - e^{\cos x}\cos(\sin x)$

e $|s(x)| = \sqrt{e^{2\cos x} + 1 - 2e^{\cos x}\cos(\sin x)}$.

ESERCIZIO N. 2. Si considerino le funzioni $f(x,y,z) = x^2 + y + z$ e $g(x,y,z) = x^3 + x + y^2 - z^2$.

(*i*) Si provi che $\Sigma = \{(x,y,z)^T : g(x,y,z) = 0\}$ è il sostegno di una superficie regolare in forma implicita.

• g è di classe C^1

• $\nabla g(x,y,z) = (3x^2+1, 2y, -2z)^T \neq \underline{0} \quad \forall (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$

(*ii*) Si stabilisca se f ha punti di estremo vincolato su Σ.

Se $(x,y,z)^T \in \Sigma$ è p.to di estremo vincolato per f, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = \lambda(3x^2+1) \\ 1 = 2\lambda y \\ 1 = -2\lambda z \\ x^3+x+y^2-z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda \neq 0 \\ x \neq 0 \\ y = -z \\ x^2+1 = 0 \end{cases}$$: impossibile. Quindi $f|_\Sigma$ non ha p.ti di estremo.

(*iii*) Si verifichi che Σ contiene la retta $\{(0,t,t)^T : t \in \mathbb{R}\}$.

Per ogni $t \in \mathbb{R}$, si ha

$g(0,t,t) = 0$

e quindi $r = \{(0,t,t)^T : t \in \mathbb{R}\} \subset \Sigma$.

(*iv*) Si calcolino $\inf_\Sigma f$ e $\sup_\Sigma f$.

Per ogni $(x,y,z)^T \in r$, si ha $f(x,y,z) = 2y$

e quindi

$$-\infty = \inf_r f \geq \inf_\Sigma f \quad \text{e} \quad +\infty = \sup_r f \leq \sup_\Sigma f.$$

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ________

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli il volume in senso generalizzato del solido

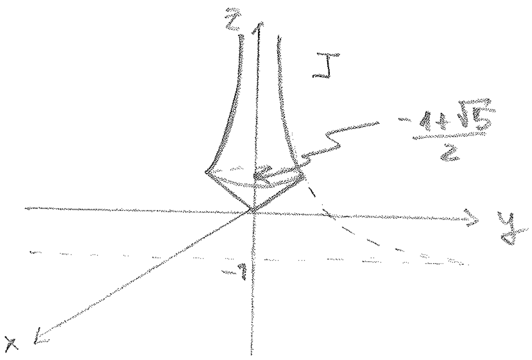
$$J = \left\{ (x,y,z)^T : \sqrt{x^2+y^2} \le \min\left\{ z, \frac{1}{z+1} \right\} \right\}.$$

RISULTATO

$$m_3(J) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 + \frac{2\pi}{1+\sqrt{5}}$$

SVOLGIMENTO

Si ha $(0\le) z = \frac{1}{z+1} \iff \begin{cases} z^2+z-1=0 \\ z \ge 0 \end{cases} \iff z = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.



Per ogni n, sia $A_n = \{(x,y,z)^T \in J : 0 \le z \le n\}$.
Si ha

$$\iiint_{A_n} 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \left(\iint_{S_z} 1\,dx\,dy \right) dz + \int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{n} \left(\iint_{S_z} 1\,dx\,dy \right) dz =$$

$$= \int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \pi z^2\,dz + \int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{n} \pi \frac{1}{(1+z)^2}\,dz = \frac{\pi}{3}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 + \pi \left[\frac{-1}{1+z} \right]_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{n}$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 + \frac{2\pi}{1+\sqrt{5}} - \frac{\pi}{1+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{3}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 + \frac{2\pi}{1+\sqrt{5}}$$

$$= m_3(J)$$

ESERCIZIO N. 4. Si determini la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$, soluzione del sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} x'' + x - e^t = 0 \\ y'' + y' - e^{-t}x = 0 \end{cases}$$

e verificante le condizioni $\gamma(0) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)^T$ e $\gamma'(0) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)^T$.

RISULTATO

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{2}e^t, \ \frac{1}{2}(1 - e^{-t} + t) \right)^T$$

SVOLGIMENTO

- $x'' + x = e^t$

$x(t) = A\cos t + B\sin t + \frac{1}{2}e^t$, $x'(t) = -A\sin t + B\cos t + \frac{1}{2}e^t$

$$\begin{cases} x(0) = \frac{1}{2} \\ x'(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} A + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ B + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \iff A = B = 0$$

$x(t) = \frac{1}{2}e^t$

- $y'' + y' = e^{-t}x = \frac{1}{2}$

$y(t) = C + De^{-t} + \frac{1}{2}t$, $y'(t) = -De^{-t} + \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C + D = 0 \\ -D + \frac{1}{2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C = \frac{1}{2} \\ D = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}t$