Esame di Analisi matematica II - 9 CFU : esercizi
A.a. 2014-2015, sessione autunnale, I appello
Corso prof. Omari

COGNOME ____________________ NOME ____________________

N. Matricola ____________________ Anno di corso ____________________

Corso di Studi: Ingegneria Industriale ○ Ingegneria Navale ○

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la serie di potenze nel corpo complesso $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+1}(z-i)^{n+1}$.

(*i*) Si determini, giustificando la risposta, il raggio di convergenza della serie.

- $\sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n}{n+1}(z-i)^{n+1}\right|} = \frac{2|z-i|^{1+\frac{1}{n}}}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} \longrightarrow 2|z-i|$, se $n \to +\infty$
- se $|z-i| < \frac{1}{2}$, la serie converge; se $|z-i| > \frac{1}{2}$, la serie non converge
- $R = \frac{1}{2}$

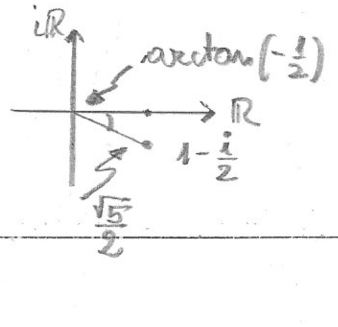
(*ii*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se la serie converge nei punti $i - \frac{1}{2}$ e $i + \frac{1}{2}$.

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$ diverge (serie armonica)
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ converge (criterio di Leibniz)

(*iii*) Si calcoli, giustificando la risposta, la somma della serie nel punto $\frac{3}{4}i$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+1}\left(-\frac{1}{4}i\right)^{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{n+1}}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}\left(-\frac{i}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{-i}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{i}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\log\frac{\sqrt{5}}{2} + i\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$



ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f(x,y) = x^4 + y^2 + 2x^2y + 1$.

(*i*) Si calcoli il gradiente $\nabla f(x,y)$.

$$\nabla f(x,y) = \left(4x^3 + 4xy,\ 2y + 2x^2\right)^T$$

(*ii*) Si calcoli la matrice Hessiana $Hf(x,y)$.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 4y & 4x \\ 4x & 2 \end{pmatrix}$$

(*iii*) Si calcoli il polinomio di Taylor di ordine 2 nel punto $(1,-1)^T$.

$$f(1,-1) = 1, \quad \nabla f(1,-1) = (0,0)^T, \quad Hf(1,-1) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_2(x,y) = 1 + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 + 4(x-1)^2 + 4(x-1)(y+1) + (y+1)^2$$

(*iv*) Si determinino i punti critici di f.

$$\nabla f(x,y) = (0,0)^T \iff \begin{cases} x^3 + xy = 0 \\ y + x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee\ y = -x^2$$

$$\iff y = -x^2$$

(*v*) Si provi che $\min_{\mathbb{R}^2} f = 1$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$.

- $\left.\begin{array}{ll} f(x,y) = (x^2+y)^2 + 1 \geq 1 & \forall (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \\ f(x,-x^2) = 1 & \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \min_{\mathbb{R}^2} f = 1$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x,0) = +\infty \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$

(*vi*) Si determinino gli insiemi di livello $L_k(f) = \{(x,y)^T : f(x,y) = k\}$, con $k \in \mathbb{R}$, che non sono curve regolari in forma implicita.

$$\nabla f(x,y) = (0,0)^T \iff y = -x^2 \quad ; \quad f(x,-x^2) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow L_1(f) = \{(x,y)^T : (x^2+y)^2 + 1 = 1\} = \{(x,y)^T : y = -x^2\}$$

non è curva regolare in forma implicita.

COGNOME e NOME ______________________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Si ponga

$$E = \{(x, y, z)^T : \frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 \le 1,\ -1 \le z \le 2 - \frac{x^2}{4} - y^2\}.$$

(*i*) Si provi che E è un insieme sezionabile rispetto all'asse z e se ne descrivano le sezioni S_z.

- $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 + z^2 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 2 - z \end{cases}$, $\quad z^2 + z + 1 = 0$, $\quad {}_1z_2 = \begin{cases} -\frac{1+\sqrt5}{2} < -1 \\ \frac{-1+\sqrt5}{2} > -1 \end{cases}$;

- $-1 \le z \le \frac{-1+\sqrt5}{2}$: $\quad S_z = \{(x,y,z)^T : \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1 + z^2\}$
  ellisse di semiassi $2\sqrt{1+z^2}$, $\sqrt{1+z^2}$

- $\frac{-1+\sqrt5}{2} \le z \le 2$: $\quad S_z = \{(x,y,z)^T : \frac{x^2}{4} + y^2 \le 2 - z\}$
  ellisse di semiassi $2\sqrt{2-z}$, $\sqrt{2-z}$

(*ii*) Si calcoli $m_3(E)$.

- $$\int_{-1}^{\frac{-1+\sqrt5}{2}} m_2(S_z)\,dz = \int_{-1}^{\frac{-1+\sqrt5}{2}} 2\pi(z^2+1)\,dz = 2\pi\left[\frac{z^3}{3} + z\right]_{-1}^{\frac{-1+\sqrt5}{2}} =$$
  $$= 2\pi\left[\frac13\left(\frac{-1+\sqrt5}{2}\right)^3 + \left(\frac{-1+\sqrt5}{2}\right) + \frac13 + 1\right]$$

- $$\int_{\frac{-1+\sqrt5}{2}}^{2} m_2(S_z)\,dz = \int_{\frac{-1+\sqrt5}{2}}^{2} 2\pi(2-z)\,dz = 2\pi\left[2z - \frac{z^2}{2}\right]_{\frac{-1+\sqrt5}{2}}^{2} =$$
  $$= 2\pi\left[4 - 2 - 2\left(\frac{-1+\sqrt5}{2}\right) + \frac12\left(\frac{-1+\sqrt5}{2}\right)^2\right]$$

- $$m_3(E) = 2\pi\left[\frac13\left(\frac{-1+\sqrt5}{2}\right)^3 + \frac12\left(\frac{-1+\sqrt5}{2}\right)^2 - \left(\frac{-1+\sqrt5}{2}\right) + \frac{10}{3}\right]$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri il campo vettoriale $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$g(x, y) = (e^x \log y,\ y + 2\arctan(x + y))^T.$$

(i) Per ogni $(x_0, y_0)^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, si calcoli la matrice Jacobiana $Jg(x_0, y_0)$.

$$Jg(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} e^{x_0}\log y_0 & e^{x_0}\dfrac{1}{y_0} \\ \dfrac{2}{1+(x_0+y_0)^2} & 1+\dfrac{2}{1+(x_0+y_0)^2} \end{pmatrix}$$

(ii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se il campo vettoriale lineare $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definito da $h(x, y) = Jg(0, 1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, è conservativo.

- $Jg(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $h(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (y,\ x+2y)^T$;

- $\text{rot}\, h(x,y) = (1-1)\underline{e}_3 = \underline{0}$, $\mathbb{R}^2$ è stellato

$\Rightarrow$ h è conservativo

(in generale, un campo vettoriale lineare è conservativo se e solo se la matrice rappresentativa è simmetrica)

(iii) Si risolva il sistema di equazioni differenziali lineari $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, con le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

- $\begin{cases} x' = y \\ y' = x + 2y \\ x(0) = 0,\ y(0) = 1 \end{cases}$

- $y'' = x' + 2y' = y + 2y'$:

$$y'' - 2y' - y = 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0, \quad {}_1\lambda_2 = 1 \pm \sqrt{2}$$
$$y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

- $\begin{cases} x(t) = \dfrac{A}{\lambda_1}e^{\lambda_1 t} + \dfrac{B}{\lambda_2}e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \end{cases}$

- $\begin{cases} x(0) = \dfrac{A}{\lambda_1} + \dfrac{B}{\lambda_2} = 0 \\ y(0) = A + B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\ B = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$