Esame di Analisi matematica II: esercizi
A.a. 2009-2010, sessione invernale, II appello

Corso: **OMARI** ○ **TIRONI** ○

COGNOME e NOME ____________________________ **N. Matricola** ____________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ____________________________

Si risolvano gli esercizi : **1** ○ **2** ○ **3** ○ **4** ○ **5** ○ **6** ○

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \sin x}{x^3} & \text{se } x \neq 0, \\ \frac{1}{6} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(i) Si determinino

- lo sviluppo in serie di Taylor-Maclaurin della funzione $x - \sin x$:

- lo sviluppo in serie di Taylor-Maclaurin della funzione $f(x)$:

- il raggio di convergenza dello sviluppo:

(ii) Si approssimi $\int_0^1 f(x)dx$, con un errore inferiore a 10^{-4}.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \int_1^2 e^{xyt^2}\,dt.$$

(i) Si determinino

- il dominio e i segni di f:

- il gradiente di f:

- la matrice Hessiana di f:

- i punti critici di f:

- la natura dei punti critici di f:

(ii) Si calcolino, giustificando la risposta, $\inf f$ e $\sup f$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli

$$\iint_E \frac{y}{x}\, dxdy$$

con $E = \left\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2, 1 \leq xy \leq 2\right\}$.

RISULTATO

SVOLGIMENTO (Suggerimento: la sostituzione $xy = u$, $\frac{y}{x} = v$ può essere utile.)

ESERCIZIO N. 4. Si considerino la funzione $f(x, y, z) = x + y - 2z$ e la curva in forma implicita $\Gamma = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, x - 2z - 1 = 0\}$.

(i) Si determinino gli eventuali punti singolari di Γ.

(ii) Si provi che f ha massimo e minimo assoluti su Γ.

(iii) Si determinino gli estremi assoluti di f su Γ.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 5. Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{x(t)-1}{t} \\ y''(t) + \pi^2 y(t) = x^2(t). \end{cases}$$

(i) Si determinino tutte le soluzioni $(x(t), y(t))^T$ del sistema tali che $(x(1), y(1))^T = (1, 0)^T$.

(ii) Si verifichi che tali soluzioni hanno immagine limitata.

ESERCIZIO N. 6. Si consideri il campo vettoriale

$$g(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x^3 y + y^2, \frac{1}{4}x^4 + 2xy + \frac{1}{1+y^2} \right)^T .$$

(i) Si determinino

- il dominio di g:

- il rotore di g:

(ii) Si stabilisca se g è conservativo sul suo dominio e, in caso affermativo, si determini un potenziale.

(iii) Si calcoli $\int_\gamma \langle g, \tau \rangle ds$ con $\gamma(t) = (1 + t^2 + \cos(\pi t), t^3 + \sin(\pi t))^T$, $t \in [0, 1]$.