Università degli Studi di Trieste - Facoltà d'Ingegneria
Corsi di Studi in Ingegneria dell'Informazione,
Industriale (curr. automazione, elettrica) e Civile (curr. ambientale)

Programma del corso di Analisi Matematica II - A.A. 2007-2008
Prof. Pierpaolo Omari

Serie numeriche Motivazioni ed esempi. Serie di numeri reali. Termine generale e ridotte. Serie convergenti, divergenti, indeterminate. La serie geometrica e suo carattere (con dim.). La serie armonica e suo carattere (con dim.). La serie di Mengoli e suo carattere (con dim.). Condizione necessaria per la convergenza: il termine generale dev'essere infinitesimo (con dim.). Relazioni tra serie e integrali generalizzati (con dim.). Serie a termini positivi. Aut-aut per le serie a termini positivi (con dim.). Criterio del confronto. Criterio dell'ordine d'infinitesimo (con dim.). Serie armonica generalizzata e suo carattere (con dim.). Criterio del rapporto (con dim.). Criterio del rapporto con il limite (con dim.). Criterio della radice. Criterio della radice con il limite. Serie con i termini di segno misto. Serie assolutamente e semplicemente convergenti. La convergenza assoluta implica la convergenza. Serie con i termini di segno alternato. Criterio di Leibniz (con dim.). Operazioni con le serie : somma e prodotto per una costante. Convergenza di una successione di numeri complessi. Serie di numeri complessi. Serie assolutamente e semplicemente convergenti. La convergenza assoluta implica la convergenza (con dim.).

Successioni e serie di funzioni Motivazioni ed esempi. Il problema della sviluppabilità in serie di Taylor e di Fourier. Successioni di funzioni. Convergenza puntuale di una successione di funzioni. Convergenza uniforme di una successione di funzioni. Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di derivata e di integrale. Serie di funzioni. Convergenza puntuale e uniforme. Il criterio di Weierstrass e il criterio di Leibniz per la convergenza uniforme di una serie di funzioni. Serie di potenze in $\mathbb{R}$. Esempi preliminari. Lemma di Abel (con dim.). Insieme di convergenza. Raggio di convergenza. Proprietà caratteristiche del raggio di convergenza (con dim.). Struttura dell'insieme di convergenza (con dim.). Esempi. Proprietà della funzione somma. Teorema di derivazione. Teorema di primitivazione. Conseguenze e applicazioni. Sviluppabilità in serie di Taylor in $\mathbb{R}$. La somma di una serie di potenze è sviluppabile in serie di Taylor. Esempio di una funzione di classe C^∞ che non è sviluppabile in serie di Taylor. Condizioni sulle derivate per la sviluppabilità in serie di Taylor in $\mathbb{R}$ (con dim.). Funzioni analitiche in $\mathbb{R}$. Sviluppo in serie di Taylor-Maclaurin delle principali funzioni elementari: $e^x, \sin x, \cos x, \sinh x, \cosh x, (1+x)^\alpha, \log(1+x), \mathrm{arctg} x$. Funzioni complesse di variabile complesssa. Serie di potenze in $\mathbb{C}$. Convergenza e convergenza assoluta. Le funzioni $\exp z, \sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$ in $\mathbb{C}$. Le formule di Eulero.

Lo spazio $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ Struttura metrica di $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$: la distanza euclidea in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Proprietà della distanza. Sfere aperte e chiuse. Intorni. Proprietà degli intorni. Punti di accumulazione, punti interni e punti di frontiera. Chiusura di un insieme e insiemi chiusi. Interno di un insieme e insiemi aperti. Frontiera di un insieme. Insiemi limitati. Funzioni da $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ in $\mathbb{R}^{\mathrm{M}}$. Campi scalari. Insiemi di livello. Curve parametriche. Superfici parametriche. Campi vettoriali. Limiti e continuità di funzioni da $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ in $\mathbb{R}^{\mathrm{M}}$. Teorema di Weierstrass. Insiemi connessi per archi. Teorema di connessione. Teorema degli zeri. Struttura lineare di $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Prodotto scalare in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Proprietà del prodotto scalare.

Disuguaglianza di Cauchy–Schwarz (con dim.). Norma euclidea in $\mathbb{R}^N$. Proprietà della norma (con dim.). Coseno dell'angolo fra due vettori. Applicazioni lineari da $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}^M$. Applicazioni lineari e matrici associate. Forme lineari. Teorema di Riesz in $\mathbb{R}^N$ (con dim.).

Integrale di Riemann in $\mathbb{R}^N$ Motivazioni. Rettangoli in $\mathbb{R}^2$. Decomposizioni. Somme inferiori e superiori e relative proprietà. Funzioni integrabili secondo Riemann su un rettangolo. Interpretazione geometrica. Formule di riduzione per gli integrali doppi. Teorema di Fubini. Parallelepipedi rettangoli in $\mathbb{R}^3$. Decomposizioni. Somme inferiori e superiori e relative proprietà. Funzioni integrabili secondo Riemann su un parallelepipedo. Formule di riduzione per gli integrali tripli: per corde e per sezioni. Teorema di Fubini. $N-$rettangoli in $\mathbb{R}^N$. Applicazioni al calcolo di masse, momenti d'inerzia, potenziali gravitazionali. Una condizione sufficiente per l'integrabilità su un rettangolo: la continuità. Proprietà dell'integrale: linearità, monotonia, teorema del valore assoluto, integrabilità del prodotto, teorema della media, integrabilità della restrizione, additività rispetto al dominio. Integrale di una funzione limitata su un insieme limitato. Misura secondo Peano-Jordan. Insiemi misurabili. Proprietà della misura: additività e monotonia (con dim.). Caratterizzazione degli insiemi misurabili per mezzo della loro frontiera. Insiemi di misura nulla e loro caratterizzazione. Il grafico di una funzione integrabile su un $N-$rettangolo ha misura nulla (con dim. per $N = 1$). Una condizione sufficiente per l'integrabilità di una funzione limitata su un rettangolo: la continuità a meno di un insieme di misura nulla. Una funzione continua su insieme chiuso e misurabile è integrabile (con dim.). Insiemi normali in $\mathbb{R}^2$. Ogni insieme normale è chiuso e misurabile (con dim.). Formula di riduzione per gli integrali doppi su insiemi normali (con dim.). Insiemi normali in $\mathbb{R}^3$. Ogni insieme normale è chiuso e misurabile. Formula di riduzione per corde per gli integrali tripli. Insiemi sezionabili in $\mathbb{R}^3$. Formula di riduzione per sezioni per gli integrali tripli. Cambio di variabili negli integrali multipli. Riesame del caso unidimensionale. Trasformazione lineare di coordinate in $\mathbb{R}^2$. Cambiamento di variabili negli integrali doppi. Coordinate polari ed ellittiche in $\mathbb{R}^2$. Cambiamento di variabili negli integrali tripli. Trasformazione lineare di coordinate. Coordinate cilindriche, sferiche ed ellissoidali in $\mathbb{R}^3$. Integrali generalizzati in $\mathbb{R}^N$. Insiemi localmente misurabili e funzioni localmente integrabili. Integrale generalizzato di una funzione di segno costante. Indipendenza dalla particolare successione invadente. Integrale generalizzato di una funzione di segno qualunque. Insiemi misurabili in senso generalizzato.

Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^N$ Motivazioni. Derivate direzionali e parziali per campi scalari e vettoriali. Esempi di funzioni discontinue in un punto dotate di derivate direzionali in quel punto. Differenziale di un campo scalare. Approssimante lineare. Piano tangente e sua equazione. La differenziabilità implica la continuità (con dim.). La differenziabilità implica l'esistenza di tutte le derivate direzionali (con dim.). Rappresentazione del differenziale. Matrice Jacobiana. Gradiente. Proprietà del gradiente: il gradiente individua la direzione orientata di massimo incremento (con dim.) e il gradiente è ortogonale agli insiemi di livello (con dim.). Una condizione sufficiente per la differenziabilità: teorema del differenziale totale. Funzioni di classe C^1. Regole algebriche di differenziazione. Differenziale di funzioni a valori vettoriali. Una funzione a valori vettoriali è differenziabile se e solo se lo sono tutte le sue componenti. Rappresentazione del differenziale. Matrice Jacobiana. Differenziazione della funzione composta. Casi particolari. Teorema del valor medio (con dim.). Funzioni con gradiente nullo su un aperto connesso. Derivate direzionali e parziali di ordine superiore. Funzioni di classe C^k. Teorema di Schwarz. Forme lineari e quadratiche. Forme quadratiche definite positive, definite negative, o indefinite nel segno. Criteri di definitezza nel caso $N = 2$. Criterio di Jacobi-Sylvester. Differenziale secondo di un campo scalare. Matrice Hessiana. Teorema di Young (sulla simmetria della matrice Hessiana). Una condizione sufficiente affinchè una funzione sia due volte differenziabile. Formula di Taylor del secondo ordine. Estremi relativi e assoluti di un funzionale. Test delle derivate prime (o del gradiente) per i punti di estremo (con dim.). Punti critici. Punti di sella. Test delle derivate seconde (o della matrice Hessiana) per i punti di estremo (con dim.). Vincoli. Punti di estremo vincolato. Una condizione necessaria affinchè un punto sia di estremo vincolato su una curva o una superficie in forma parametrica (con dim.). Teorema dei moltiplicatori di Lagrange in $\mathbb{R}^2$ (curve) e in $\mathbb{R}^3$ (superfici e curve). Interpretazione geometrica.

Curve in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ $(N = 2, 3)$ Curve in forma parametrica: rappresentazione parametrica e sostegno. Curve chiuse. Curve semplici. Curve regolari: vettore e versore tangente. Retta tangente ad una curva regolare semplice. Curve regolari in forma cartesiana. Curve regolari in forma polare. Curve regolari in forma implicita in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$. Cenno al Teorema di Dini in $\mathbb{R}^2$. Curve rettificabili e lunghezza di una curva. Rettificabilità di una curva di classe C^1 (con dim.). Formula per il calcolo della lunghezza di una curva di classe C^1. Lunghezza di una curva in forma cartesiana. Lunghezza di una curva in forma polare. Curve equivalenti. Orientazione di curve equivalenti. Il versore tangente di curve equivalenti. Integrale curvilineo di un campo scalare. Indipendenza dalla rappresentazione parametrica (con dim.). Interpretazione geometrica. Applicazione al calcolo di masse, baricentri e momenti d'inerzia.

Superficie in $\mathbb{R}^3$ Superficie regolari semplici in forma parametrica: parametrizzazione e sostegno. Linee coordinate. Vettore normale e piano tangente. Superficie regolari in forma cartesiana. Superficie regolari in forma implicita. Superficie regolari cilindriche. Superficie regolari di rotazione. Area di una superficie regolare semplice. Giustificazione della formula in un caso particolare. Area di una superficie cartesiana, di una superficie cilindrica e di una superficie di rotazione.

Campi vettoriali Campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$. Integrale curvilineo di un campo vettoriale. Dipendenza nel segno dalla rappresentazione parametrica. Interpretazione meccanica. La notazione delle forme differenziali. Campi vettoriali conservativi. Potenziali. Caratterizzazione dei potenziali su un aperto connesso (con dim.). Una generalizzazione del teorema di Torricelli per il calcolo dell'integrale curvilineo di un campo conservativo (con dim.). Teorema di conservazione dell'energia meccanica (con dim.). Caratterizzazione dei campi conservativi sugli aperti connessi. Circuitazione di un campo. Campi conservativi e campi a circuitazione nulla. Il rotore di un campo in $\mathbb{R}^3$. Il rotore di un campo in $\mathbb{R}^2$. Rotore e campi conservativi. Campi irrotazionali. Un esempio di campo irrotazionale non conservativo. Insiemi stellati. Lemma di Poincaré sulla caratterizzazione dei campi conservativi su un aperto stellato. La divergenza di un campo vettoriale. Campi solenoidali. Domini regolari in $\mathbb{R}^2$. Orientazione positiva della frontiera di un dominio regolare. Teorema del rotore (di Stokes) in $\mathbb{R}^2$ (con dim.). Formula di Green. Applicazione della formula di Green al calcolo dell'area di un dominio regolare. Flusso di un campo attraverso la frontiera di un dominio regolare. Teorema della divergenza (di Gauss) in $\mathbb{R}^2$ (con dim.). Significato del rotore e della divergenza di un campo di velocità.

Equazioni differenziali Modelli matematici ed equazioni differenziali. Equazioni differenziali ordinarie (EDO) e alle derivate parziali (EDP). Ordine di un'equazione differenziale. EDO in forma normale. EDO scalari del primo ordine (in forma normale). Definizione di soluzione. Campo vettoriale associato ad un'EDO del primo ordine, curve associate alle soluzioni e relative proprietà. Problema di Cauchy (o ai valori iniziali). Soluzione di un problema di Cauchy. Teorema di esistenza locale (di Peano). Esempi di non esistenza. Esempi di non unicità. Esempi di non esistenza globale. Teorema di esistenza e unicità locale (di Cauchy). Equazioni con variabili separate: metodo risolutivo (con dim.). Equazioni nonlineari ed equazioni linearizzate: metodo di linearizzazione. Confronto fra le rispettive soluzioni (con dim.). EDO del primo ordine scalari omogenee e non omogenee (o complete). Applicazione lineare associata. Struttura dell'insieme delle soluzioni della completa (con dim.). Struttura dell'insieme delle soluzioni dell'omogenea (con dim.). Determinazione di una soluzione particolare della completa: metodo della variazione delle costanti (con dim.). Principio di sovrapposizione (con dim.). L'equazioni di Bernoulli: metodo risolutivo. EDO scalari del secondo ordine (in forma normale). Definizione di soluzione. Problema di Cauchy (o ai valori iniziali). Teorema di esistenza e unicità locale. Equazioni di Newton autonome e conservative: risoluzione con il metodo dell'energia. EDO lineari del secondo ordine scalari con coefficienti costanti omogenee e non omogenee (o complete). Applicazione lineare associata. Struttura dell'insieme delle soluzioni della completa. Struttura dell'insieme delle soluzioni dell'omogenea: teorema della dimensione (con dim.). Equazione caratteristica. Determinazione di una base. Determinazione di una soluzione particolare della completa: metodo del nucleo risolvente. Metodo di somiglianza. Principio di sovrapposizione. EDO lineari di ordine N scalari con coefficienti costanti omogenee e non omogenee (o complete). Equazione caratteristica. Struttura dell'insieme delle soluzioni dell'omogenea e determinazione di una base. Struttura dell'insieme delle soluzioni della completa. Determinazione di una soluzione particolare della completa: metodo del nucleo risolvente. Metodo di somiglianza. Principio di sovrapposizione. Equazioni di Eulero. Sistemi di EDO del primo ordine. EDO scalari di ordine N e sistemi del primo ordine. Sistemi di EDO lineari del primo ordine. Struttura dell'insieme delle soluzioni. Determinazione di una base dell'insieme delle soluzioni di un sistema di EDO lineari del primo ordine omogeneo a coefficienti costanti: il caso degli autovalori semplici. Sistemi di EDO lineari del primo ordine di dimensione 2 con coefficienti costanti: risoluzione per mezzo di una riduzione ad un'equazione del secondo ordine.

BIBLIOGRAFIA

• Dispense disponibili in rete (nel sito: `http://www.dmi.units.it/~omari/`).

• M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, Matematica, Calcolo infinitesimale e algebra lineare, Zanichelli, Bologna, 2000.

• R.A. Adams, Calcolo differenziale 1 e 2, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1992.

Trieste, 30.5.2008