Esame di Analisi Matematica II : teoria
Corso prof. OMARI
A.a. 2000–2001, sessione autunnale, I appello.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso __________ **Laurea in Ingegneria** ______________________________

Si diano le seguenti definizioni (o enunciati) :

1. Serie numeriche assolutamente e semplicemente convergenti.
2. Criterio dell'ordine di infinitesimo per la convergenza di una serie numerica.
3. Convergenza puntuale e uniforme di una successione di funzioni.
4. M-test di Weierstrass.
5. Teorema di passaggio al limite sotto il segno d'integrale.
6. Serie di Taylor di una funzione di variabile reale.
7. Derivata in senso complesso, funzione olomorfa e funzione analitica.
8. Serie di potenze in $\mathbb{C}$.
9. Raggio di convergenza e insieme di convergenza di una serie di potenze.
10. Teorema di derivazione a termine a termine di una serie di potenze.
11. Funzione esponenziale in $\mathbb{C}$.
12. Equazione esponenziale e funzione logaritmo in $\mathbb{C}$.
13. Serie binomiale e sviluppo di $(1+x)^\alpha$.
14. Definizione di prodotto scalare, norma e distanza euclidea in $\mathbb{R}^N$.
15. Proprietà del prodotto scalare in $\mathbb{R}^N$.
16. Teorema di Riesz in $\mathbb{R}^N$.
17. Funzione integrabile secondo Riemann su un rettangolo in $\mathbb{R}^3$.
18. Teorema della media integrale.
19. Insiemi misurabili secondo Peano-Jordan in $\mathbb{R}^N$.
20. Insiemi trascurabili in $\mathbb{R}^N$ e caratterizzazione degli insiemi misurabili.
21. Integrale di una funzione su un insieme limitato in $\mathbb{R}^N$.
22. Formule di riduzione per corde e per sezioni in $\mathbb{R}^3$.
23. Formula di cambiamento di variabili per gli integrali multipli in $\mathbb{R}^N$.
24. Insiemi localmente misurabili e funzioni localmente integrabili in $\mathbb{R}^N$.
25. Integrale in senso generalizzato in $\mathbb{R}^N$.
26. Misura in senso generalizzato in $\mathbb{R}^N$.

1. Derivata direzionale e derivata parziale.
2. Funzione differenziabile in un punto, differenziale e approssimante lineare.
3. Gradiente, insiemi di livello e relative proprietà.
4. Funzione due volte differenziabile in un punto.
5. Matrice Jacobiana di un campo vettoriale e matrice Hessiana di un campo scalare.
6. Teorema di Schwarz sull'inversione dell'ordine di derivazione.
7. Forme quadratiche, matrici simmetriche e loro segno.
8. Criterio di Jacobi-Sylvester per la definitezza di una forma quadratica.
9. Punti di minimo, di massimo e di sella.
10. Punti di estremo condizionato.
11. Teorema di Dini in $\mathbb{R}^2$.
12. Superficie regolare in forma implicita, piano tangente e retta normale.
13. Curva regolare semplice chiusa in forma parametrica.
14. Curve rettificabili e lunghezza di una curva.
15. Integrale curvilineo di un campo scalare e proprietà rispetto ai cambi di parametro.
16. Integrale curvilineo di un campo vettoriale e proprietà rispetto ai cambi di parametro.
17. Gradiente di un campo scalare, rotore e divergenza di un campo vettoriale.
18. Campi conservativi e potenziali.
19. Teorema di derivazione sotto il segno di integrale.
20. Superficie regolare in forma parametrica e piano tangente.
21. Area di una superficie regolare semplice in forma parametrica.
22. Soluzione di un'EDO del primo ordine.
23. Teoremi di Peano e di Cauchy-Lipschitz per un'EDO del primo ordine.
24. Condizione di sottolinearità e teorema di esistenza globale per il problema di Cauchy per un'EDO del primo ordine.
25. Soluzione di un problema di Cauchy per un'EDO del secondo ordine.
26. Wronskiano e nucleo risolvente per un'EDO lineare di ordine n.

Si dimostrino i seguenti teoremi:

1. Relazioni tra serie numeriche e integrali generalizzati.
2. Carattere della serie armonica generalizzata.
3. Criterio del rapporto per la convergenza di una serie numerica con termini positivi.
4. Criterio di Leibniz per la convergenza di una serie numerica con termini di segno alternato.
5. Condizioni sulle derivate successive per la convergenza della serie di Taylor in $\mathbb{R}$.
6. Lemma di Abel sulle serie di potenze in $\mathbb{C}$.
7. Proprietà caratteristiche del raggio di convergenza di una serie di potenze in $\mathbb{C}$.
8. Integrazione termine a termine di una serie di potenze in $\mathbb{C}$.
9. Formule di Eulero.
10. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.
11. Teorema di Fubini sui rettangoli in $\mathbb{R}^2$.
12. Integrabilità di una funzione continua e limitata su un insieme misurabile in $\mathbb{R}^N$.
13. Formula di riduzione su domini normali in $\mathbb{R}^2$.
14. Teorema di Guldino sul volume dei solidi di rotazione.
15. Indipendenza dell'integrale generalizzato dalla particolare successione invadente.
16. Criterio del confronto per l'integrale generalizzato.

1. Differenziabiltà ed esistenza delle derivate direzionali.
2. Teorema del differenziale totale.
3. Teorema del valor medio.
4. Differenziazione della funzione composta.
5. Formula di Taylor di ordine 2 per i campi scalari.
6. Test delle derivate prime per l'esistenza di un punto di estremo.
7. Test delle derivate seconde per l'esistenza di un punto di estremo.
8. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange in $\mathbb{R}^2$.
9. Rettificabilitá delle curve di classe C^1.
10. Caratterizzazione dei campi conservativi sugli aperti connessi.
11. Caratterizzazione dei campi conservativi sugli aperti stellati di $\mathbb{R}^2$ (teorema di Poincaré).
12. Teorema del rotore in $\mathbb{R}^2$ (dim. nel caso di un rettangolo).
13. Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$.
14. Metodo della variazione delle costanti per la determinazione di una soluzione particolare di un'EDO lineare del primo ordine.
15. Principio di sovrapposizione per un'EDO lineare del secondo ordine.
16. Determinazione di una base dello spazio delle soluzioni di un'EDO lineare omogenea del secondo ordine.

COGNOME e NOME ______________________________

I DEFINIZIONE

II DEFINIZIONE

ENUNCIATO DEL I TEOREMA

ENUNCIATO DEL II TEOREMA

DIMOSTRAZIONE DEL I TEOREMA

DIMOSTRAZIONE DEL II TEOREMA