Esame di Analisi Matematica II : esercizi
Corso prof. OMARI
A.a. 2000–2001, sessione estiva, III appello

COGNOME e NOME ______________________	**N. Matricola** ________
Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________	
Risolvere gli esercizi : 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6 ○	

ESERCIZIO N. 1. Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx \, .$$

ESERCIZIO N. 2. Si dica per quali $z \in \mathbb{C}$ converge la serie di numeri complessi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^{n-1}$$

e se ne determini la somma.

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli la massa del solido

$$E = \left\{ (x,y,z)^T : 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4, \ z > 0 \right\}$$

avente densità $\mu(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

ESERCIZIO N. 4. Si studi la natura dei punti critici della funzione

$$f(x,y) = (x-y)(y-x^2).$$

ESERCIZIO N. 5. Si calcoli l'area del sostegno della superficie avente rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x &= u+v \\ y &= uv \\ z &= u-v \end{cases}$$

con $u^2 + v^2 \leq 1$.

ESERCIZIO N. 6. Si determinino le soluzioni dell'equazione

$$y^{IV} - y + 1 = 0$$

che sono limitate su $\mathbb{R}$.

① **RISULTATO**

La serie è convergente

SVOLGIMENTO Si ha che

$s_n = \int_k^{k+1} e^{-x^2}dx = \int_0^n e^{-x^2}dx$ per ogni n e quindi esiste finito $\lim_{n\to+\infty} s_n$ se e solo se esiste finito $\lim_{n\to+\infty}\int_0^n e^{-x^2}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Poichè $\mathrm{ord}_{+\infty}\, e^{-x^2}$ è soprareale si conclude che esiste finito $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

② **RISULTATO**

Posto $z = x+iy$, la serie converge se e solo se $y<0$ con somma $\frac{1}{4}(z-i)^2$.

SVOLGIMENTO Ricordando che $\sum_{n=1}^{+\infty} n\cdot w^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dw}(w^n)$ converge a $\frac{d}{dw}\left(\frac{1}{1-w}\right) = \frac{1}{(1-w)^2}$ se e solo se $|w|<1$, si conclude che

$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{n-1}$ converge a $\frac{1}{\left(1-\frac{z+i}{z-i}\right)^2} = \frac{(z-i)^2}{4}$ se e solo se

$\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = \sqrt{\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2}} < 1$, cioè se e solo se $y<0$, dove $z = x+iy$.

③ **RISULTATO**

2π

SVOLGIMENTO Si ha, usando coordinate sferiche,

$$\iiint_E \mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_E \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_1^2 \frac{1}{\rho^2}\rho^2 \sin\varphi\, d\rho\right)d\theta\right)d\varphi =$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi = 2\pi$$

4

RISULTATO

$(0,0)^T$ e $(1,1)^T$ sono pti di sella e $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)^T$ è pto di massimo.

SVOLGIMENTO Si ha:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y-3x^2+2xy \\ x-2y+x^2 \end{pmatrix} \quad e \quad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -6x+2y & 1+2x \\ 1+2x & -2 \end{pmatrix}.$$

I pti critici sono $(0,0)^T$, $(1,1)^T$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)^T$. Studiando il segno della matrice Hessiana si conclude che $(0,0)^T$ e $(1,1)^T$ sono pti di sella e $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)^T$ è pto di massimo. Tali conclusioni si possono anche ottenere esaminando i segni di f direttamente.

5

RISULTATO

$$\frac{2\pi}{3}\sqrt{2}\left(3^{3/2} - 2^{3/2}\right)$$

SVOLGIMENTO Posto $K = \{(u,v)^T : u^2+v^2 \le 1\}$ e $\varphi : K(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ uv \\ u-v \end{pmatrix}$, si ha $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sqrt{2u^2+2v^2+4}$ e quindi l'area è

$$\iint_K \sqrt{2}\sqrt{u^2+v^2+2}\,du\,dv = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{\rho^2+2}\;\rho\,d\rho\right)d\vartheta = \pi\sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{\rho^2+2}\cdot 2\rho\,d\rho$$

$$= \pi\sqrt{2}\,\frac{2}{3}\left[(\rho^2+2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}\sqrt{2}\left(3^{3/2} - 2^{3/2}\right).$$

6

RISULTATO

$c_1\cos x + c_2\sin x + 1$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

SVOLGIMENTO Si ha:

- l'equazione caratteristica è $\lambda^4 - 1 = 0$ e quindi la soluzione generale dell'omogenea è $c_1\cos x + c_2\sin x + c_3e^x + c_4e^{-x}$, con $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$;
- una soluzione particolare è la costante 1;
- la soluzione generale è $c_1\cos x + c_2\sin x + c_3e^x + c_4e^{-x} + 1$;
- le soluzioni limitate su $\mathbb{R}$ sono $c_1\cos x + c_2\sin x + 1$.