Esame di Analisi Matematica II : esercizi
Corso prof. OMARI
A.a. 2000–2001, sessione invernale, I appello. Trieste, 8 gennaio 2001

COGNOME e NOME ________________________ N. Matricola __________

Anno di Corso ________ Laurea in Ingegneria ________________________

Risolvere gli esercizi : 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6 ○

ESERCIZIO N. 1. Si studi il carattere della serie di numeri complessi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i+\sqrt{n}}{n^2-i} .$$

ESERCIZIO N. 2. Si determini il cerchio di convergenza e la somma della serie di potenze in $\mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+i}{n!}(z+i)^n .$$

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\, dx\, dy.$$

ESERCIZIO N. 4. Si determinino gli estremi assoluti di

$$f(x,y,z) = \frac{1}{z\sqrt{2}}(x-y)$$

su

$$E = \left\{ (x,y,z)^T : x^2+y^2+z^2 = 1 \ , \ z = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} .$$

ESERCIZIO N. 5. Si calcoli il flusso del campo vettoriale $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definito da

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} x - y^2 \\ x^2 - y \end{pmatrix} ,$$

attraverso la frontiera del dominio regolare D delimitato dai sostegni delle curve di rappresentazione parametrica

$$\gamma_1(t) = (t, 1+\cos t)^T, t \in [-\pi,\pi], \qquad \text{e} \qquad \gamma_2(t) = (0,t)^T, t \in [-\pi,\pi].$$

ESERCIZIO N. 6. Si dimostri che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (2x-1)(y-1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

esiste globalmente su $\mathbb{R}$ e si calcoli $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

①

RISULTATO

La serie è (assolutamente) convergente.

SVOLGIMENTO Si ha:

$$\left|\frac{i+\sqrt{n}}{n^2-i}\right| = \sqrt{\frac{1+n}{n^4+1}} \quad \text{e} \quad \operatorname{ord}_{+\infty} \sqrt{\frac{1+n}{n^4+1}} = \frac{3}{2}.$$

Quindi la serie dei moduli è convergente per il criterio dell'ordine di infinitesimo.

②

RISULTATO

Cerchio di convergenza: $\mathbb{C}$. Somma: $e^{z+i}(z+2i)$

SVOLGIMENTO

- Cerchio di convergenza:

$$\left|\frac{(n+1)+i}{(n+1)!}\right| \left|\frac{n!}{n+i}\right| |z+i| = \sqrt{\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}} \cdot \frac{|z+i|}{n+1} \to 0 \quad \text{se } n \to +\infty.$$ Quindi per il criterio del rapporto la serie converge per ogni $z \in \mathbb{C}$.

- Somma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+i}{n!}(z+i)^n = (z+i)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z+i)^{n-1}}{(n-1)!} + i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+i)^n}{n!} = (z+i)e^{z+i} + i\,e^{z+i}$$

④

RISULTATO

$$\min_E f = f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1, \quad \max_E f = f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1.$$

SVOLGIMENTO Il problema è equivalente allo studio di $g(x,y) = f(x,y,\frac{1}{\sqrt{2}}) = x-y$ su $D = \{(x,y)^T : x^2+y^2 = \frac{1}{2}\}$. Per il teorema esistono $\min_D g$ e $\max_D g$. Per il teorema di Lagrange si ha:

$$\begin{cases} 1+2\lambda x = 0 \\ -1+2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -y \\ x^2+y^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

: $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ è pto di min. e $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$ è pto di max. di g in D.

RISULTATO

3 π

SVOLGIMENTO Si ha, posto $A_n = \{(x,y)^T : x^2+y^2 \le n\}$,

$$\iint_{A_n} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^n \frac{\rho}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho\right)d\vartheta = \pi\int_0^n \frac{2\rho}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho =$$

$$= \pi\left[\frac{-1}{1+\rho^2}\right]_0^n = \pi\left(1-\frac{1}{1+n^2}\right) \to \pi \quad \text{se } n \to +\infty.$$

RISULTATO

5 0

SVOLGIMENTO Si ha, per il teorema della divergenza:

$$\int_{+\mathrm{fr}D} \langle g, \nu\rangle\,ds = \iint_D \operatorname{div} g\,dx\,dy = 0, \quad \text{essendo}$$

$$\operatorname{div} g(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x-y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2-y) = 1-1 = 0 \quad \text{su } \mathbb{R}^2.$$

RISULTATO

6 $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$.

SVOLGIMENTO • Si ha (soluzione esplicita):

$$x^2-x = \int_0^x (2t-1)\,dt = \int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)-1}\,dt = \int_0^{y(x)} \frac{1}{s-1}\,ds = \log(1-y(x))$$

e quindi $y(x) = 1-e^{x^2-x}$ esiste su $\mathbb{R}$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$.

• Alternativamente (studio qualitativo): poiché $f(x,y) = (2x-1)(y-1)$ verifica le cond. di sottolinearità su $\mathbb{R}^2$, $y(x)$ esiste su $\mathbb{R}$. Inoltre, poiché $y(x) < 1$, si ha $y'(x) = (2x-1)(y(x)-1) < 0$ per $x > \frac{1}{2}$. Quindi esiste $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \ell < 1$. Poiché $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x,y(x)) = -\infty$, è $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$.