Esame di Analisi Matematica II : esercizi
Corso prof. OMARI
A.a. 2000–2001, sessione invernale, III appello

COGNOME e NOME ______________________	N. Matricola __________
Anno di Corso ______	Laurea in Ingegneria ______________________
Risolvere gli esercizi :	1 ◯ 2 ◯ 3 ◯ 4 ◯ 5 ◯ 6 ◯

ESERCIZIO N. 1. Si studi il carattere della serie di numeri complessi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp(i\, n!)}{i + n\sqrt{n}}.$$

ESERCIZIO N. 2. Si determini l'insieme di convergenza e la somma della serie di potenze in $\mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\, z)^{2n}}{(2n+1)!}.$$

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli

$$\iint_E \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy,$$

con

$$E = \left\{ (x,y)^T : x^2+y^2 \geq 1,\ (x-1)^2+y^2 \leq 1 \right\}.$$

ESERCIZIO N. 4. Si studi la natura dei punti critici della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{3}(x^3 - y^3) - \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

ESERCIZIO N. 5. Si calcoli

$$\int_\gamma < g, \tau > ds,$$

dove

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \text{con } t \in [0,1], \quad \text{e} \quad g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \log y \\ \dfrac{x^2}{y} + 1 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO N. 6. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 y'' + x y' + y = \log x \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1. \end{cases}$$

① **RISULTATO**

La serie è (assolutamente) convergente.

SVOLGIMENTO Si ha:

$$\left|\frac{\exp(i n!)}{i + n\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+n^3}} \quad \text{e} \quad \operatorname{ord}_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^3}} = \frac{3}{2}.$$

Quindi la serie è assolutamente convergente.

② **RISULTATO**

$\mathbb{C}$; $\quad s(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } z = 0 \\ \frac{1}{z}\sin z & \text{se } z \neq 0. \end{cases}$

SVOLGIMENTO Si ha per ogni $z \neq 0$:

$$\left|\frac{(iz)^{2n+2}}{(2n+3)!}\right| \cdot \left|\frac{(2n+1)!}{(iz)^{2n}}\right| = \frac{|z|^2}{(2n+3)(2n+2)} \to 0 \quad \text{se } n \to +\infty.$$

Quindi, per il criterio del rapporto, la serie converge per ogni $z \in \mathbb{C}$.
Inoltre risulta:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = \begin{cases} 1 & \text{se } z = 0 \\ \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z}\sin z & \text{se } z \neq 0. \end{cases}$$

③ **RISULTATO**

$$2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

SVOLGIMENTO Usando coordinate polari, si ha:

$$\iint_E \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \iint_K \frac{1}{\varrho} \cdot \varrho \, d\varrho \, d\vartheta$$

con $K = \{(\varrho, \vartheta)^T : \varrho \geq 1, \ \varrho \leq 2\cos\vartheta, \ -\frac{\pi}{3} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3}\}$.
Quindi risulta:

$$\iint_K 1 \, d\varrho \, d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^{2\cos\vartheta} 1 \, d\varrho \right) d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2\cos\vartheta - 1)\, d\vartheta = \left[2\sin\vartheta - \vartheta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$$

4

RISULTATO

$(0,0)^T$ è pto di max. rel. ; $(1,-1)^T$ è pto di min. rel. ;
$(1,0)^T$ e $(0,-1)^T$ sono pti di sella.

SVOLGIMENTO Si ha:

- $\nabla f(x,y) = \underline{0} \iff \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ -y^2 - y = 0 \end{cases}$: $(0,0)^T$; $(1,0)^T$; $(0,-1)^T$; $(1,-1)^T$ sono i pti critici.
- $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-1 & 0 \\ 0 & -2y-1 \end{pmatrix}$: $Hf(0,0)$ è def. neg.; $Hf(1,0)$ e $Hf(0,-1)$ sono indefinite; $Hf(1,-1)$ è def. pos.

5

RISULTATO

e

SVOLGIMENTO

Un potenziale di g su $A = \{(x,y)^T : y > 0\}$ è $F(x,y) = x^2 \log y + y$.
Quindi risulta:

$$\int_\gamma \langle g, \tau \rangle ds = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(1,e) - F(0,1) = 1 + e - 1 = e$$

6

RISULTATO

$y(x) = \log x$

SVOLGIMENTO

Si tratta di un'equazione di Eulero, comunque si constata facilmente che la soluzione cercata è $y(x) = \log x$ su $]0,+\infty[$.