Esame di Analisi Matematica II : esercizi
Corso prof. OMARI
A.a. 2000–2001, sessione autunnale, I appello

COGNOME e NOME ______________________	**N. Matricola** __________
Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________	
Risolvere gli esercizi : 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6 ○	

ESERCIZIO N. 1. Si determini l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che la serie di numeri complessi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-1}{z-i}\right)^n$$

è convergente.

ESERCIZIO N. 2. Si sviluppi in serie di Taylor di punto iniziale $z_0 = 0$ la funzione

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z} & \text{se } z \neq 0, \\ 1 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

e se ne determini il raggio di convergenza.

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli il volume del solido

$$E = \left\{(x, y, z)^T : \max\{\,|x|, |y|\,\} \leq 1,\ 0 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\right\}.$$

ESERCIZIO N. 4. Si determinino gli estremi assoluti della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\, e^{-x^2-y^2}$$

su

$$E = \left\{(x, y)^T : x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

ESERCIZIO N. 5. Si determinino i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ tali che il campo vettoriale $g : A \to \mathbb{R}^2$, definito da

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{ax - y}{x^2 + y^2} \\ \dfrac{x - ay}{x^2 + y^2} \end{pmatrix},$$

è conservativo su $A = \{(x, y)^T : x < y\}$.

ESERCIZIO N. 6. Si risolva il problema

$$\begin{cases} y'' = y, \\ y(0) = 0,\ y(1) = 1. \end{cases}$$

RISULTATO

(1) La serie converge se e solo se $z \in S = \{x+iy : x > y\}$.

SVOLGIMENTO La serie converge se e solo se, posto $z = x+iy$,

$$\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = \frac{|z-1|}{|z-i|} = \sqrt{\frac{(x-1)^2+y^2}{x^2+(y-1)^2}} < 1 \iff (x-1)^2+y^2 < x^2+(y-1)^2 \iff x>y.$$

Quindi la serie converge se e solo se $z \in S$, con

$$S = \{x+iy : x>y\}.$$

RISULTATO

(2) $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

SVOLGIMENTO Si ha per ogni $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}, \qquad \text{essendo} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Il raggio di convergenza è $R = +\infty$.

RISULTATO

(3) $\operatorname{vol} E = \frac{16}{3}$

SVOLGIMENTO Si ha:

$$\operatorname{vol} E = \iiint_E 1\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_0^{2-x^2-y^2}\right) dx\,dy = \iint_D (2-x^2-y^2)\,dx\,dy,$$

con $D = \{(x,y)^T : |x| \le 1,\ |y| \le 1\}$. Quindi risulta:

$$\iint_D (2-x^2-y^2)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}(2-x^2-y^2)\,dy\right)dx = 2\int_{-1}^{1}\left(2-x^2-\frac{1}{3}\right)dx = \frac{16}{3}$$

④

RISULTATO

$\min_E f = 0$, $\max_E f = \frac{1}{\sqrt{2e}}$

SVOLGIMENTO Posto $t = \sqrt{x^2+y^2}$, la fun $g(t) = t\,e^{-t^2}$ è tale che $\min_{[0,2]} g = g(0) = 0$ e $\max_{[0,2]} g = g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2e}}$.

Quindi $\min_E f = 0$ e $\max_E f = \frac{1}{\sqrt{2e}}$

⑤

RISULTATO

$a = 0$

SVOLGIMENTO Poichè A è stellato, g è conservativo su A se e solo se $\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{y^2-x^2-2axy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2+2axy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial g_2}{\partial x}$ in A. Il che è vero se e solo se $a = 0$.

⑥

RISULTATO

$y(x) = \frac{e^{x+1}}{e^2-1} + \frac{e^{1-x}}{1-e^2}$

SVOLGIMENTO La soluzione generale di $y'' = y$ è $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Tale soluzione verifica le condizioni al bordo $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ se e solo se $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e + c_2 e^{-1} = 1 \end{cases}$, cioè $c_1 = \frac{e}{e^2-1}$, $c_2 = \frac{e}{1-e^2}$.

Quindi la soluzione cercata è $y(x) = \frac{e^{x+1}}{e^2-1} + \frac{e^{1-x}}{1-e^2}$