Esame di Analisi Matematica II : esercizi
Corso prof. OMARI
A.a. 2000–2001, sessione estiva, II appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** ________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________

Risolvere gli esercizi : 1 ◯ 2 ◯ 3 ◯ 4 ◯ 5 ◯ 6 ◯

ESERCIZIO N. 1. Si studi il carattere della serie di numeri complessi

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n+i^n}{n\sqrt{n}}.$$

ESERCIZIO N. 2. Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ converge la serie di numeri complessi

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(x-1)^n e^{inx}$$

e se ne determini la somma.

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli la misura in senso generalizzato dell'insieme

$$E = \left\{(x,y)^T : x > 0,\ |y| < \min\left\{x,\ \frac{1}{x^4}\right\}\right\}.$$

ESERCIZIO N. 4. Si determinino gli estremi assoluti della funzione

$$f(x,y) = \log x - \log y$$

su

$$E = \left\{(x,y)^T : y \geq 1 + x^2\right\}.$$

ESERCIZIO N. 5. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y - \cos y \\ x + 2y - \sin x \end{pmatrix}$$

attraverso la frontiera, orientata positivamente, del dominio

$$D = \left\{(x,y)^T : 0 < x < 1,\ x^2 < y < e^x\right\}.$$

ESERCIZIO N. 6. Si trovino le soluzioni definite su $]0,+\infty[$ di

$$y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 1.$$

RISULTATO

① La serie è (semplicemente) convergente

SVOLGIMENTO Si ha:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ è semplicemente convergente (criterio di Leibniz);
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{n\sqrt{n}}$ è assolutamente convergente ($\operatorname{ord}_{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{3}{2}$);

Quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+i^n}{n\sqrt{n}}$ è (semplicemente) convergente.

RISULTATO

② La serie converge a $\frac{1}{1-(x-1)e^{ix}}$ se e solo se $0 < x < 2$.

SVOLGIMENTO Si ha:

$\sum_{n=0}^{+\infty} (x-1)^n e^{inx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(x-1)e^{ix}\right]^n$ è convergente a $\frac{1}{1-(x-1)e^{ix}}$

se e solo se $|(x-1)e^{ix}| = |x-1| < 1$, cioè se e solo se $0 < x < 2$.

RISULTATO

③ $\frac{5}{3}$

SVOLGIMENTO Si ha:

$$m(E) = \iint_E 1\,dx\,dy = \lim_{n\to+\infty} \left[\int_0^1 \left(\int_{-x}^{x} 1\,dy\right)dx + \int_1^n \left(\int_{-\frac{1}{x^4}}^{\frac{1}{x^4}} 1\,dy\right)dx\right]$$

$$= \int_0^1 2x\,dx + \lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{2}{x^4}\,dx = 1 + \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n^3}\right) = \frac{5}{3}.$$

RISULTATO

(4) $\inf_{E\cap \mathrm{dom} f} f = -\infty$; $\max_{E\cap \mathrm{dom} f} f = f(1,2) = \log \frac{1}{2}$.

SVOLGIMENTO Si ha: $\mathrm{dom} f = \{(x,y)^T : x>0,\ y>0\}$ e $f(x,y) = \log \frac{x}{y}$ su dom f. Poiché le linee di livello di f sono semirette per l'origine del tipo $x = e^c y$, con $c \in \mathbb{R}$, si constata che $\inf_{E\cap \mathrm{dom} f} f = -\infty$ e $\sup_{E\cap \mathrm{dom} f} f < +\infty$. Poiché non ci sono pti critici interni a $E \cap \mathrm{dom} f$ e $f(x,y)|_{y=1+x^2} = \log \frac{x}{1+x^2}$ ha massimo per $x=1$, si conclude che $\max_{E\cap \mathrm{dom} f} f = \log \frac{1}{2}$.

RISULTATO

(5) $2e - \frac{7}{6}$

SVOLGIMENTO Si ha, per il teorema della divergenza,

$$\int_{+\mathrm{fr} D} \langle g, \nu \rangle \, ds = \iint_D \mathrm{div}\, g \, dx\,dy = \iint_D (2x+2)\, dx\,dy =$$

$$= 2\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{e^x} (x+1)\, dy \right) dx = 2\int_0^1 (x+1)(e^x - x^2)\, dx =$$

$$= 2\int_0^1 (x e^x + e^x - x^3 - x^2)\, dx =$$

$$= 2\left[x e^x - e^x + e^x - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = 2\left(e - \frac{7}{12}\right)$$

RISULTATO

(6) $y(x) = c_1 \cos(\log x) + c_2 \sin(\log x) + \frac{1}{5} x^2$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

SVOLGIMENTO Si tratta di un'equazione di Eulero. Ponendo $x = e^t$ e $y(e^t) = u(t)$, si ottiene l'equazione $u'' + u = e^{2t}$, che ha come soluzione generale $u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{5} e^{2t}$. Quindi la soluzione generale dell'equazione data è $y(x) = c_1 \cos(\log x) + c_2 \sin(\log x) + \frac{1}{5} x^2$