Esame di Analisi Matematica II : esercizi
Corso prof. OMARI

A.a. 2000–2001, sessione invernale, II appello. Trieste, 22 gennaio 2001

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

Anno di Corso ________ Laurea in Ingegneria ______________________

Risolvere gli esercizi : 1 ◯ 2 ◯ 3 ◯ 4 ◯ 5 ◯ 6 ◯

ESERCIZIO N. 1. Si studi il carattere della serie di numeri complessi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^{2n}}{i\sqrt{n!}}.$$

ESERCIZIO N. 2. Si sviluppi in serie di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$ la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)$$

e se ne determini il raggio di convergenza.

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli il volume del solido ottenuto facendo ruotare di 2π intorno all'asse z l'insieme piano

$$D = \left\{(x,z)^T : 0 \le z \le 1,\ z(1-z) \le x \le 2z(1-z)\right\}.$$

ESERCIZIO N. 4. Si determinino i punti del grafico della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

aventi minima distanza da $(0,0,0)^T$.

ESERCIZIO N. 5. Si calcoli l'area della superficie cilindrica

$$\Sigma = \left\{(x,y,z)^T :\ y = x^2,\ 0 \le z \le x,\ 0 \le x \le 1\right\}.$$

ESERCIZIO N. 6. Si determinino tutte le soluzioni periodiche dell'equazione differenziale

$$y^{IV} = 16y\ .$$

RISULTATO

① La serie è (assolutamente) convergente

SVOLGIMENTO Si ha:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(\sqrt{2})^{2n+2}}{\sqrt{(n+1)!}} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{(\sqrt{2})^{2n}} = \frac{\sqrt{2}}{n+1} \to 0$$

e quindi, per il criterio del rapporto, la serie converge assolutamente.

RISULTATO

② $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(2^n-1)\,x^n$; $R = \frac{1}{2}$

SVOLGIMENTO Si ha, per ogni $|x| < 1/2$:

$$f(x) = \log(1+2x) - \log(1+x) =$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(2x)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(2^n-1)\,x^n,$$

dove il raggio di convergenza dell'ultima serie è $R = \frac{1}{2}$.

RISULTATO

③ $\frac{\pi}{10}$

SVOLGIMENTO Si ha, riducendo per sezioni,

$$\iiint_E 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\iint_{S_z} dx\,dy\right) dz = \int_0^1 \pi\left(4z^2(1-z)^2 - z^2(1-z)^2\right) dz$$
$$= 3\pi \int_0^1 (z^4 - 2z^3 + z^2)\,dz = 3\pi\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{10}.$$

4

RISULTATO

La distanza minima è $\sqrt{2}$ ed è raggiunta nei pti di $\{(x,y,1)^T : x^2+y^2=1\}$

SVOLGIMENTO Si tratta di minimizzare la fun $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ su $G(f)$, ossia la fun $\sqrt{x^2+y^2+\frac{1}{x^2+y^2}}$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Posto $t = x^2+y^2$, questo equivale a minimizzare la fun $h(t) = \sqrt{t+\frac{1}{t}}$ su $]0,+\infty[$. Poiché $\lim_{t\to 0^+} h(t) = \lim_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$ e $h'(t)=0$ se e solo se $t=1$, si ha $\min_{]0,+\infty[} h = h(1) = \sqrt{2}$.

5

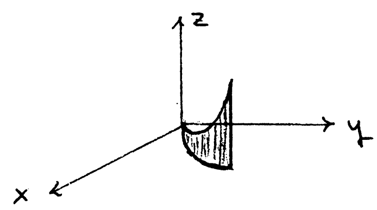
RISULTATO

$\frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)$

SVOLGIMENTO Si ha, posto $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ con $\gamma(t) = (t,t^2)^T$,

$$\text{area}(\Sigma) = \int_\gamma x \, ds = \frac{1}{8}\int_0^1 8t\sqrt{1+4t^2}\, dt = \frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}\left(1+4t^2\right)^{3/2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$



6

RISULTATO

$c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

SVOLGIMENTO Si ha:

- equazione caratteristica : $\lambda^4 - 16 = 0$
  radici : $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2i$, $\lambda_4 = 2i$
- base di soluzioni : $\{e^{-2x}, e^{2x}, \cos 2x, \sin 2x\}$

Le soluzioni periodiche sono tutte e sole le fun $c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.