Esame di Analisi Matematica II : esercizi
Corso prof. OMARI
A.a. 2000–2001, sessione estiva, I appello

COGNOME e NOME ________________ **N. Matricola** ________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ________________

Risolvere gli esercizi : 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6 ○

ESERCIZIO N. 1. Si studi il carattere della serie di numeri complessi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right)^{-n^2}.$$

ESERCIZIO N. 2. Si sviluppi in serie di Taylor di punto iniziale $z_0 = 0$ la funzione

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} + i\cos z$$

e se ne determini il raggio di convergenza.

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli il volume del solido

$$E = \left\{(x,y,z)^T : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x^2+y^2 \le 1\right\}.$$

ESERCIZIO N. 4. Si determinino gli estremi assoluti della funzione

$$f(x,y) = \log(4-x^2-y^2)$$

su

$$E = \left\{(x,y)^T : y \le 1-x^2\right\}.$$

ESERCIZIO N. 5. Si calcoli la circuitazione del campo vettoriale

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} e^x + y^2 + 1 \\ x^2 + e^y + 1 \end{pmatrix}$$

lungo la frontiera, orientata positivamente, del dominio

$$D = \left\{(x,y)^T : 0 < x < 2, x(x-1) < y < x\right\}.$$

ESERCIZIO N. 6. Si studi il comportamento per $x \to +\infty$ delle soluzioni di

$$y'' + y' + y = 1.$$

RISULTATO

(1) La serie è assolutamente convergente.

SVOLGIMENTO

Si ha: $|a_n| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n^2}{2}}$ e quindi

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} < 1 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Dunque per il criterio della radice la serie è assolutamente convergente.

RISULTATO

(2) $$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{i}{(2n)!}\right) z^{2n} \quad ; \quad R = 1$$

SVOLGIMENTO

Si ha:

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n} \quad \text{per ogni } |z| < 1$$

e

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

per ogni z. Quindi risulta

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{i}{(2n)!}\right) z^{2n} \quad \text{per ogni } |z| < R = 1.$$

RISULTATO

(3) $$\frac{4}{3}\pi\left(8 - 3^{3/2} - 1\right)$$

SVOLGIMENTO

Usando la formula di riduzione per corde si ha:

$$\text{vol } E = 2 \iint_D \left(\int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\right) dx\, dy, \quad \text{con } D = \{(x,y)^T : x^2+y^2 \le 1\},$$

e quindi, passando a coordinate polari,

$$\text{vol } E = 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\sqrt{4-\rho^2} - \sqrt{1-\rho^2}\right) \rho\, d\rho\right) d\vartheta = 2\pi \int_0^1 \left(\sqrt{4-t} - \sqrt{1-t}\right) dt$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(8 - 3^{3/2} - 1\right)$$

RISULTATO

4 $\max_{E\cap \operatorname{dom} f} f = \log 4$; $\inf_{E\cap\operatorname{dom} f} f = -\infty$.

SVOLGIMENTO Poiché $\operatorname{dom} f = \{(x,y)^T : x^2+y^2<4\}$, si studia f su $E\cap\operatorname{dom} f$. Conviene osservare che $f(x,y) = g(x^2+y^2)$ con $g(t) = \log(4-t)$. La fun g è definita su $[0,4[$, è decrescente e $\lim_{t\to 4} g(t) = -\infty$. Quindi $\max g = g(0) = \log 4$ e $\inf g = -\infty$. Si conclude allora che $\max_{E\cap\operatorname{dom} f} f = f(0,0) = \log 4$ e $\inf_{E\cap\operatorname{dom} f} f = -\infty$.

RISULTATO

5 $\frac{16}{15}$

SVOLGIMENTO Si ha, per il teorema del rotore,

$$\int_{+\operatorname{fr} D} \langle g,\tau\rangle\, ds = \iint_D \langle \operatorname{rot} g, e_3\rangle\, dx\,dy = \iint_D (2x-2y)\,dx\,dy$$
$$= 2\int_0^2\left(\int_{x(x-1)}^{x}(x-y)\,dy\right)dx = 2\int_0^2\left(2x^2-x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2(x-1)^2\right)dx$$
$$= 2\int_0^2\left(\frac{1}{2}x^4-2x^3+2x^2\right)dx = 2\left[\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{16}{15}$$

RISULTATO

6 Ogni soluzione $y(x)$ è tale che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 1$.

SVOLGIMENTO

- La generica soluzione dell'omogenea è $z(x) =$
$$z(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$
con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- Una soluzione particolare della completa è $\bar{y}(x) = 1$.
- La generica soluzione è $y(x) = 1 + e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$ e quindi $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 1$.