Esame di Analisi Matematica II : esercizi
Corso prof. OMARI
A.a. 2000–2001, appello di dicembre

COGNOME e NOME ____________________	**N. Matricola** ________
Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ____________________	
Risolvere gli esercizi : 1 ○ 2 ○ 3 ○ 4 ○ 5 ○ 6 ○	

ESERCIZIO N. 1. Si determinino gli $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tali che la serie di numeri complessi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\,i}{n^\alpha + i}$$

è assolutamente convergente.

ESERCIZIO N. 2. Si determini lo sviluppo in serie di Taylor, di punto iniziale $z_0 = \frac{\pi}{2}i$, della funzione $\exp z$.

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli

$$\iint_E (x+y)\,dx\,dy,$$

dove E è il cerchio di centro $(1,1)^T$ e raggio 1.

ESERCIZIO N. 4. Si studi la natura dei punti critici della funzione

$$f(x,y) = x\log x + y\log y - 2x - 2y.$$

ESERCIZIO N. 5. Si verifichi che il campo vettoriale $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definito da

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{1+x^2y^2} \\ \dfrac{x}{1+x^2y^2} \end{pmatrix},$$

è conservativo su $\mathbb{R}^2$ e se ne determini un potenziale.

ESERCIZIO N. 6. Si determinino tutte le soluzione definite su $\mathbb{R}^+$ dell'equazione differenziale

$$y'' + \frac{y}{x^2} = 0.$$

1

RISULTATO

$\alpha > 2$

SVOLGIMENTO Si ha:

$$\left|\frac{n\,i}{n^{\alpha}+i}\right| = \frac{1}{n^{\alpha-1}}\cdot\frac{1}{\left|1+\frac{i}{n^{\alpha}}\right|} \quad \text{e quindi} \quad \operatorname{ord}_{+\infty}\left|\frac{n\,i}{n^{\alpha}+i}\right| = \alpha-1 .$$

Pertanto la serie è assolutamente convergente se e solo se $\alpha-1>1$, cioè $\alpha>2$

2

RISULTATO

$$e^{z} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i}{n!}\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)^{n}$$

SVOLGIMENTO Si ha, posto $f(z)=e^{z}$,

$f^{(n)}(z)=e^{z}$ e $f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}i\right) = e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} = i$.

Quindi risulta

$$e^{z} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}i\right)}{n!}\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)^{n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i}{n!}\left(z-\frac{\pi}{2}i\right)^{n}.$$

3

RISULTATO

2π

SVOLGIMENTO Usando la trasformazione di coordinate

$\begin{cases} x = 1+\rho\cos\vartheta \\ y = 1+\rho\sin\vartheta \end{cases}$, si ottiene

$$\iint_{E}(x+y)\,dx\,dy = \int_{0}^{2\pi}\left(\int_{0}^{1}(2+\rho\cos\vartheta+\rho\sin\vartheta)\rho\,d\rho\right)d\vartheta = 2\pi.$$

RISULTATO

4 $(e,e)^T$ è pto di minimo relativo

SVOLGIMENTO Si ha:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \log x - 1 \\ \log y - 1 \end{pmatrix} \quad e \quad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}.$$

L'unico pto critico è $(e,e)^T$. Essendo $Hf(e,e)$ definita positiva, $(e,e)^T$ è pto di minimo relativo.

RISULTATO

5 Un potenziale di g su $\mathbb{R}^2$ è $F(x,y) = \operatorname{arctg}(xy)$.

SVOLGIMENTO Si ha:

$$\operatorname{rot} g(x,y) = \left(\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)\right)\underline{e}_3 = \underline{0}.$$ Quindi g è conservativo su $\mathbb{R}^2$ e un suo potenziale è

$F(x,y) = \operatorname{arctg}(xy)$.

RISULTATO

6 $A\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right) + B\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)$, con $A,B \in \mathbb{R}$.

SVOLGIMENTO Si tratta di un'equazione di Eulero. Con il cambio di variabile $x = e^t$, posto $u(t) = y(e^t)$, si ottiene l'equazione $u'' - u' + u = 0$ che ha come soluzione generale $Ae^{t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + Be^{t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Quindi la soluzione generale di $y'' + \frac{y}{x^2} = 0$ su $\mathbb{R}^+$ è $A\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right) + B\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)$