Università di Trieste - Facoltà d'Ingegneria

Corsi di Laurea in Ingegneria Chimica, Elettrica, Elettronica, dei Materiali

Programma di Analisi Matematica II

Anno Accademico 2000-2001

Prof. Pierpaolo Omari

Serie numeriche. Nozione di serie: termine generale e ridotta n-esima. Carattere di una serie. Condizione necessaria per la convergenza. Relazioni tra serie e integrali generalizzati. Serie geometrica, serie armonica, serie telescopiche. Le serie aventi termine generale di segno costante non sono indeterminate. Convergenza assoluta e convergenza semplice. Combinazione lineare di due serie. Criterio del confronto, del rapporto e della radice. La serie armonica generalizzata. Criterio dell'ordine di infinitesimo. Serie a termini di segno alternato. Criterio di Leibniz. Serie di numeri complessi.

Successioni e serie di funzioni. Nozioni di convergenza puntuale e uniforme per una successione di funzioni: motivazioni e confronto. Continuità della funzione limite (senza dim.). Passaggio al limite sotto il segno di integrale (senza dim.). Passaggio al limite sotto il segno di derivata (senza dim.). Serie di funzioni. Convergenza puntuale e uniforme. M-test di Weierstrass (senza dim.). Criterio di Leibniz per la convergenza uniforme (senza dim.).

Serie di potenze. Il problema della sviluppabilità in serie di funzioni : serie di Taylor e serie di Fourier. Serie di Taylor per le funzioni di variabile reale. Condizione necessaria e sufficiente sul resto per la convergenza. Condizione sufficiente sulle derivate per la convergenza. Funzioni complesse di variabile complessa. Limiti, continuità, derivazione in senso complesso e funzioni olomorfe. Proprietà e regole di derivazione. Serie di potenze in $\mathbf{C}$. Lemma di Abel. Insieme di convergenza, raggio di convergenza e cerchio di convergenza. Proprietà del raggio di convergenza. Insieme di convergenza accidentale. Calcolo del raggio di convergenza: criterio del rapporto e della radice. Proprietà della somma di una serie di potenze: continuità e derivabilità in senso complesso (senza dim.). Sviluppo in serie di Taylor. Funzioni analitiche. Le funzioni olomorfe sono analitiche (senza dim.). Funzioni elementari in $\mathbf{C}$: esponenziale, seno, coseno, seno iperbolico, coseno iperbolico e loro principali proprietà. Formule di Eulero. L'equazione esponenziale in $\mathbf{C}$ e il logaritmo complesso. La funzione argomento principale. La potenza in $\mathbf{C}$. Sviluppo in serie di Taylor delle principali funzioni elementari in $\mathbf{R}$.

Lo spazio euclideo $\mathbf{R}^N$. Struttura metrica di $\mathbf{R}^N$. Distanza euclidea. Intorni. Punti di accumulazione, interni e di frontiera. Insiemi aperti e chiusi. Frontiera di un insieme. Continuità e limiti di funzioni fra spazi euclidei. Struttura lineare di $\mathbf{R}^N$. Prodotto scalare in $\mathbf{R}^N$ e norma euclidea. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Applicazioni lineari e matrici. Teorema di Riesz.

Teoria dell'integrazione per funzioni di più variabili. Motivazioni. Decomposizioni e proprietà relative. Somme inferiori e superiori e proprietà relative. Integrale di Riemann-Darboux di una funzione limitata su un rettangolo in $\mathbf{R}^N$. Formulazione equivalente dell'integrabilità. Integrabilità delle funzioni continue (senza dim.). Proprietà dell'integrale: linearità, monotonia e additività rispetto al dominio. Integrabilità del valore assoluto di una funzione, del prodotto di due funzioni e della restrizione. Teorema della media integrale. Teorema di Fubini in $\mathbf{R}^2$. Formule di riduzione su rettangoli per corde e per sezioni per integrali tripli (senza dim.). Insiemi trascurabili e relazioni con l'integrabilità (senza dim.). Integrale di una funzione limitata su un insieme limitato e proprietà relative. Misura secondo Peano-Jordan e sue proprietà. Caratterizzazione degli insiemi misurabili (senza dim.). Formule di riduzione su domini normali in $\mathbf{R}^2$. Formule di riduzione per corde e per sezioni in $\mathbf{R}^3$. Formula di cambiamento di variabili negli integrali multipli (senza dim.). Coordinate polari, ellittiche, sferiche, ellissoidali, cilindriche. Il I teorema di Guldino. Insiemi localmente misurabili e funzioni localmente integrabili. Integrale generalizzato per funzioni non-negative. Indipendenza dalla successione invadente e adatta. Integrale generalizzato per funzioni di segno qualunque. Criteri di integrabilità in senso generalizzato. Criterio del confronto e criteri basati sull'ordine di infinito o di infinitesimo. Misura in senso generalizzato.

Calcolo differenziale per funzioni di più variabili. Motivazioni. Derivata di una funzione a valori vettoriali. Derivate direzionali e derivate parziali. Differenziale di funzioni da $\mathbf{R}^N$ in $\mathbf{R}$. Appprossimante lineare e iperpiano tangente. Differenziabilità, continuità ed esistenza delle derivate direzionali. Gradiente e sue proprietà. Teorema del differenziale totale. Differenziabilità delle funzioni da $\mathbf{R}^N$ in $\mathbf{R}^M$. Matrice Jacobiana. Regole di differenziazione. Differenziale della funzione composta. Teoremi del valor medio. Funzioni con differenziale nullo su un aperto connesso (cenno di dim.). Derivate direzionali e parziali successive. Funzioni di classe C^k. Il differenziale secondo per funzioni da $\mathbf{R}^N$ in $\mathbf{R}$. Matrice Hessiana. Teorema di Young sulla simmetria della matrice Hessiana (senza dim.). Teorema di Schwarz (senza dim.). Formula di Taylor di ordine 2 con il resto di Peano. Estremi per funzioni di più variabili. Punti critici. Punti di sella. Forme quadratiche e matrici simmetriche. Segno di una forma quadratica. Criterio di Jacobi-Silvester (senza dim.). Test delle derivate prime e test delle derivate seconde per l'esistenza di estremi. Funzioni definite in modo implicito. Teorema di Dini in alcuni casi particolari (senza dim.). Varietà regolari in forma implicita: curve nel piano, curve e superfici nello spazio. Spazio tangente e spazio normale. Classificazione delle quadriche. Linee di livello. Estremi condizionati. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange (dim. in $\mathbf{R}^2$).

Curve e superfici parametriche e calcolo differenziale vettoriale. Curve in forma parametrica in $\mathbf{R}^N$: di classe C^k, regolari a tratti, semplici, chiuse. Vettore tangente e retta tangente. Curve in forma cartesiana, in forma implicita, in forma polare. Curve equivalenti. Orientazione di una curva. Curve rettificabili e lunghezza di una curva. Rettificabilità delle curve di classe C^1. Campi scalari e campi vettoriali. Integrale curvilineo di un campo scalare e sue proprietà. Integrale curvilineo di un campo vettoriale e sue proprietà. Il prodotto esterno in $\mathbf{R}^3$. Operatori rotore e divergenza. Campi vettoriali conservativi. Potenziali. Caratterizzazione dei campi conservativi sugli aperti connessi. Caratterizzazione dei campi conservativi sugli aperti stellati (teorema di Poincaré). Domini regolari in $\mathbf{R}^2$ e orientazione della frontiera. Teorema del rotore in $\mathbf{R}^2$ (verifica per i rettangoli). Formula di Green. Applicazioni al calcolo delle aree. Flusso di un campo vettoriale in $\mathbf{R}^2$. Teorema della divergenza in $\mathbf{R}^2$. Significato del rotore e della divergenza di un campo vettoriale. Superfici regolari semplici in forma parametrica. Linee coordinate, versore normale e piano tangente. Superfici in forma cartesiana e in forma implicita. Area di una superficie regolare semplice. Area delle superfici in forma cartesiana, delle superfici cilindriche e delle superfici di rotazione. Il II teorema di Guldino. Integrale superficiale di un campo scalare e sue proprietà. Cenno ai teoremi del rotore e della divergenza in $\mathbf{R}^3$.

Equazioni differenziali ordinarie. Motivazioni. Equazioni differenziali ordinarie (EDO) e alle derivate parziali (EDP). Modelli matematici. Definizione di soluzione di un'EDO del I ordine scalare in forma normale. Problema di Cauchy. Teorema di Peano sull'esistenza locale (senza dim.). Unicità e non-unicità. Teorema di Cauchy-Lipschitz sull' (esistenza e) unicità locali (senza dim.). Il problema dell'esistenza globale. Condizione di sottolinearità. Teorema di esistenza globale (senza dim.). Campo vettoriale associato ad un'EDO del I ordine scalare. Cenno allo studio qualitativo delle soluzioni di EDO del I ordine scalare. Equazioni a variabili separate ed equazioni omogenee. EDO lineari del I ordine scalari con coefficienti continui. Motivazioni: il metodo di linearizzazione. Esistenza e unicità globali. L'operatore lineare associato. Struttura dell'insieme delle soluzioni. Dimensione dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea e determinazione di una base. Determinazione di una soluzione dell'equazione completa. Metodo della variazione delle costanti. L'equazione di Bernoulli. Definizione di soluzione di un'EDO del II ordine scalare in forma normale. Problema di

Cauchy. Teorema di Cauchy-Lipschitz sull'esistenza e unicità locali (senza dim). L'equazione di Newton $y'' = f(y)$ e il teorema di conservazione dell'energia. EDO lineari del II ordine scalari con coefficienti costanti. Struttura dell'insieme delle soluzioni. Dimensione dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea e determinazione di una base. Determinazione di una soluzione dell'equazione completa. Metodo della variazione delle costanti. Wronskiano e nucleo risolvente. Principio di sovrapposizione. Il caso di termini noti di tipo particolare. EDO lineari di ordine n scalari a coefficienti costanti. Definizione di soluzione. Struttura dell'insieme delle soluzioni. Dimensione dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea e determinazione di una base (senza dim.). Determinazione di una soluzione dell'equazione completa (senza dim.). Wronskiano e nucleo risolvente. Principio di sovrapposizione. Il caso di termini noti di tipo particolare. Equazioni di Eulero. Cenno ai sistemi piani di EDO lineari del I ordine.

BIBLIOGRAFIA

· Dispense disponibili in rete.

· C.D. Pagani - S. Salsa, Analisi Matematica (vol. 1 e 2), Masson, Milano, 1991.

· M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, Matematica , Calcolo infinitesimale e algebra lineare, Zanichelli, Bologna, 2000.

· R.A. Adams, Calcolo differenziale 1 e 2, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1992.

Trieste, 20.12.2000