Esame di Analisi matematica I - 9 CFU : esercizi
A.a. 2013-2014, sessione estiva, I appello
Corso prof. Omari

COGNOME ______		NOME ______	
N. Matricola ______		Anno di corso ______	
Corso di Studi in	Ingegneria Industriale ○	Ingegneria Navale ○	

ESERCIZIO N. 1. Si ponga, per $x > 0$,

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}\ln x}{1+t^{2x}}\,dt.$$

(*i*) Si determini l'espressione esplicita di f.

- $\int_1^y \frac{t^{x-1}\ln x}{1+t^{2x}}\,dt = \frac{\ln x}{x}\int_1^y \frac{x\,t^{x-1}}{1+t^{2x}}\,dx = \frac{\ln x}{x}\left[\operatorname{arctg}(t^x)\right]_1^y =$

$= \frac{\ln x}{x}\left(\operatorname{arctg}(y^x)-\frac{\pi}{4}\right) \longrightarrow \frac{\ln x}{x}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$, se $y \to +\infty$

- $f(x) = \frac{\pi}{4}\frac{\ln x}{x}$

(*ii*) Si studino le proprietà di convessità di f.

- $f'(x) = \frac{\pi}{4}\frac{1-\ln x}{x^2}$
- $f''(x) = \frac{\pi}{4}\frac{-3+2\ln x}{x^3}$
- $f''(x) > 0$ se $x > e^{3/2}$; $f''(x) < 0$ se $0 < x < e^{3/2}$
- f è convessa se $x > e^{3/2}$

ESERCIZIO N. 2. Si ponga

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z+i|^2 + \Re e \frac{1}{z} \le |z|^2 + 2\Im m z + 2 \right\}.$$

(*i*) Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E.

- $z \neq 0$
- $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$:

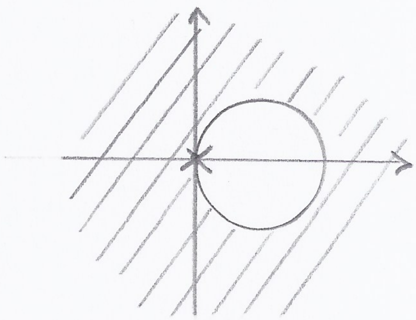
$$|z+i|^2 + \Re e \frac{1}{z} \le |z|^2 + 2\Im m z + 2 \iff$$

$$x^2 + (y+1)^2 + \Re e \left(\frac{x-iy}{x^2+y^2} \right) \le x^2+y^2+2y+2 \iff$$

$$x^2+y^2+2y+1+\frac{x}{x^2+y^2} \le x^2+y^2+2y+1+1 \iff$$

$$\frac{x}{x^2+y^2} \le 1 \iff x \le x^2+y^2 \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \geq \frac{1}{4}$$

$$E = \left\{ x+iy \neq 0 : \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \geq \frac{1}{4} \right\}$$



(*ii*) Si determinino

- l'insieme dei punti di accumulazione di E:

$$\left\{ x+iy : \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \geq \frac{1}{4} \right\}$$

- l'insieme dei punti interni di E:

$$\left\{ x+iy : \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 > \frac{1}{4} \right\}$$

- l'insieme dei punti di frontiera di E:

$$\left\{ x+iy : \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 = \frac{1}{4} \right\}$$

(*iii*) Si stabilisca se

- E è chiuso:

no

- E è aperto:

no

- E è limitato:

no

COGNOME e NOME ______________________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Si ponga, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+|t|}}\,dt.$$

(*i*) Si determinino, giustificando la riposte,

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+|t|}}\,dt = \frac{x}{\sqrt{1+c}}, \quad 0 \le x \le c \le 2x \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1+c}} \geq \frac{x}{\sqrt{1+2x}} \to +\infty,$$

se $x \to +\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, poiché f è dispari

(*ii*) Si calcoli $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+2|x|}} - \frac{1}{\sqrt{1+|x|}} = \frac{2\sqrt{1+|x|} - \sqrt{1+2|x|}}{\sqrt{1+2|x|}\cdot\sqrt{1+|x|}}$$

(*iii*) Si determinino i segni di f'.

- $2\sqrt{1+|x|} > \sqrt{1+2|x|} \iff 4+4|x| > 1+2|x| \iff 2|x| > -3$
- $f'(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

(*iv*) Si provi che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iniettiva.

f è strettamente crescente e quindi iniettiva

(*v*) Si provi che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suriettiva.

f è continua su $\mathbb{R} \Rightarrow f(\mathbb{R})$ è un intervallo di estremi $\inf f = -\infty$ e $\sup f = +\infty$, cioè $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

(*vi*) Si determinino i punti in cui f^{-1} è derivable.

f^{-1} è derivabile in $y = f(x) \iff f'(x) \neq 0$; quindi $\forall y \in \mathbb{R}$.

(*vii*) Si calcoli $(f^{-1})'(0)$.

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1, \quad \text{poiché } f(0)=0 \text{ e } f'(0)=1.$$

ESERCIZIO N. 4. Si ponga
$$f(x) = \int_0^x \cos(\sin t)\, dt.$$

(*i*) Si determini il polinomio di Taylor-Maclaurin $p_{3,0}$ di f.

- $f'(x) = \cos(\sin x)$
- $f''(x) = -\sin(\sin x)\cdot \cos x$
- $f'''(x) = -\cos(\sin x)\cdot \cos^2 x + \sin(\sin x)\cdot \sin x$
- $p_{3,0}(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 =$

$= 0 + x + 0\cdot x^2 - \frac{1}{6}x^3$

$= x - \frac{1}{6}x^3$

(*ii*) Si determini, giustificando la risposta, un intorno di 0 dove $p_{3,0}$ approssima f con un errore inferiore a 10^{-3}.

- $|f(x) - p_{3,0}(x)| = \left|\frac{f^{(IV)}(\xi)}{4!}\cdot x^4\right|$ con ξ compreso tra 0 e x
- $f^{(IV)}(x) = \sin(\sin x)\cos^3 x + 2\cos(\sin x)\cos x \sin x +$

$+ \cos(\sin x)\cos x \sin x + \sin(\sin x)\cos x$

- $|f^{(IV)}(x)| \leq 1 + 2 + 1 + 1 = 5 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $|f(x) - p_{3,0}(x)| \leq \frac{5}{4!}x^4 < 10^{-3} \Leftarrow |x| < \sqrt[4]{\frac{24}{5}\frac{1}{1000}} =$

$= \sqrt[4]{\frac{3}{5\cdot 125}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{5}$