**Esame di Analisi matematica I - 9 CFU : esercizi**
**A.a. 2013-2014, sessione autunnale, I appello**
**Corso prof. Omari**

| | | | |
|---|---|---|---|
| COGNOME ______ | | NOME ______ | |
| N. Matricola ______ | | Anno di corso ______ | |
| Corso di Studi in | Ingegneria Industriale ○ | | Ingegneria Navale ○ |

**ESERCIZIO N. 1.**

(*i*) Si determini il polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$ di grado minimo tale che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} p(x) & \text{se } x < 0, \\ e^x & \text{se } 0 \le x \le 1, \\ p(x) & \text{se } x > 1, \end{cases} \qquad \text{è di classe } C^1.$$

$$\begin{cases} p(0) = 1 \\ p(1) = e \\ p'(0) = 1 \\ p'(1) = e \end{cases} \qquad \begin{aligned} p(x) &= a x^3 + b x^2 + c x + d \\ p'(x) &= 3a x^2 + 2b x + c \end{aligned}$$

$$\begin{cases} d = 1 \\ a+b+c+d = e \\ c = 1 \\ 3a+2b+c = e \end{cases} \iff \begin{cases} a+b = e-2 \\ 3a+2b = e-1 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = e-2-a \\ a = e-1-2e+4 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3-e \\ b = 2e-5 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases} \qquad p(x) = (3-e)x^3 + (2e-5)x^2 + x + 1$$

(*ii*) Si provi che $f$ è invertibile.

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ , $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ; $f$ è continua

$$f'(x) = \begin{cases} 3(3-e)x^2 + 2(2e-5)x + 1 & \text{se} \quad x<0 \lor x>1 \\ e^x & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\frac{\Delta}{4} = (2e-5)^2 - 3(3-e) < (0{,}4)^2 - 3\cdot 0{,}2 = 0{,}16 - 0{,}6 < 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 < 2e-5 < 0{,}4 \\ 3-e > 0{,}2 \end{pmatrix}$$

- $f'(x) > 0, \forall x$

Quindi $f$ è suriettiva e iniettiva

**ESERCIZIO N. 2.** Si ponga

$$f(z) = \frac{z-i}{1+\bar{z}}.$$

(*i*) Si determini il dominio di $f$.

- $\bar{z} \neq -1 \iff z \neq -1$
- $\operatorname{dom} f = \mathbb{C} \setminus \{-1\}$

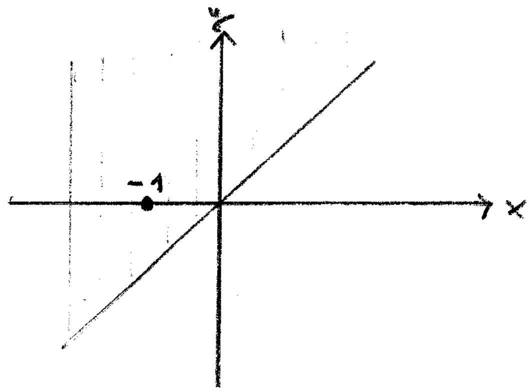
(*ii*) Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme $f^{-1}(E)$, con $E = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}$.

$z \in \operatorname{dom} f$ :

$|f(z)| \leq 1 \iff \left|\frac{z-i}{1+\bar{z}}\right| \leq 1 \iff |z-i| \leq |1+\bar{z}| \iff$

$|x+i(y-1)| \leq |(x+1)-iy| \iff x^2+(y-1)^2 \leq (x+1)^2+y^2 \iff y \geq x$

$f^{-1}(E) = \{z \in \mathbb{C} : z \neq -1 \wedge y \geq x\}$




(*iii*) Si stabilisca se

- $f^{-1}(E)$ è chiuso:

  NO

- $f^{-1}(E)$ è aperto:

  NO

- $f^{-1}(E)$ è limitato:

  NO

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

**ESERCIZIO N. 3.** Si ponga

$$\begin{cases} |2x+1|-1 & \text{se } x<0, \\ \int_x^{2x} \sinh(t^2)\,dt & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2(1+x) & \text{se } x < -\frac{1}{2} \\ 2x & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \end{cases}$$

(*i*) Si determini, giustificando la risposta, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\int_x^{2x} \sinh(t^2)\,dt = x \cdot \sinh(\xi^2) \to +\infty \quad \text{se} \quad x \to +\infty$$

$$(x \leq \xi \leq 2x)$$

(*ii*) Si determinino

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- $f'(x)$: $\begin{cases} -2 & \text{se } x < -\frac{1}{2} \\ 2 & \text{se } -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 2\sinh(4x^2) - \sinh(x^2) & \text{se } x > 0 \end{cases}$
- $f'_s(-\frac{1}{2}) = -2$
- $f'_d(-\frac{1}{2}) = 2$
- $f'_s(0) = 2$
- $f'_d(0) = 0$
- i segni di $f'$:

$f'(x) < 0$ se $x < -\frac{1}{2}$ ; $f'(x) > 0$ se $-\frac{1}{2} < x < 0$ ; $f'(x) > 0$ se $x > 0$

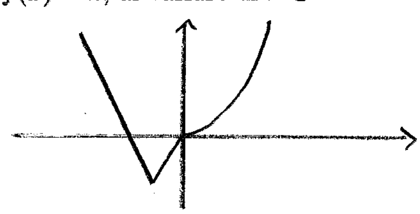
$$\left( 4x^2 > x^2 \Rightarrow 2\sinh(4x^2) > \sinh(x^2) \right)$$

- la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di $f$:

$f$ decr. se $x < -\frac{1}{2}$ ; $f$ cresc se $-\frac{1}{2} < x < 0$ ;
$f$ cresc. se $x > 0$ ; $-\frac{1}{2}$ pto di min. ass. ; $\sup f = +\infty$
$(f(-\frac{1}{2}) = -1)$

- il numero delle soluzioni $x \in \text{dom} f$ dell'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$k < -1$ : 0 sol.
$k = -1$ : 1 sol.
$k > -1$ : 2 sol.



**ESERCIZIO N. 4.** Si calcoli
$$\int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\int_x^1 \operatorname{arctg} t\, dt\right) \operatorname{arctg} x\, dx.$$

**RISULTATO**

$$\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)^2\right)$$

**SVOLGIMENTO**

Posto $g(x) := \int_x^1 \operatorname{arctg} t\, dt$, si ha

- $\int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\int_x^1 \operatorname{arctg} t\, dt\right) \operatorname{arctg} x\, dx =$

$$= -\int_0^1 \operatorname{arctg}(g(x))\, g'(x)\, dx = -\int_{g(0)}^{g(1)} \operatorname{arctg} u\, du =$$

$$= -\int_{\int_0^1 \operatorname{arctg} t\, dt}^{0} \operatorname{arctg} u\, du$$

- $\int \operatorname{arctg} u\, du = u \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\int \frac{2u}{1+u^2}\, du =$

$$= u \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2)$$

- $\int_0^1 \operatorname{arctg} t\, dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$

- $-\int_{\int_0^1 \operatorname{arctg} t\, dt}^{0} \operatorname{arctg} u\, du = \left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)^2\right)$$