Esame di Analisi matematica I - 9 CFU : esercizi
A.a. 2013-2014, sessione invernale, II appello
Corso prof. Omari

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

Corso di Studi in: **Ingegneria Industriale** ○ **Ingegneria Navale** ○

ESERCIZIO N. 1. Si ponga, per ogni $x > 0$,

$$f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t\ln x) - 1}{x\,t^2}.$$

Si determinino, giustificando le risposte,

• l'espressione esplicita di f:

• $x = 1$: $f(x) = 0$

• $x \neq 1$: $\frac{\cos(t \ln x) - 1}{(t \ln x)^2} \cdot \frac{(\ln x)^2}{x} \to -\frac{1}{2} \frac{(\ln x)^2}{x}$

$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(\ln x)^2}{x}$, se $x > 0$.

• $\mathrm{Ord}_{0^+} f$:

$\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^p} = -\frac{1}{2} \cdot (\ln x)^2 \cdot x^{p-1} \to \begin{cases} -\infty & p = 1 \\ 0 & p > 1 \end{cases}$ se $x \to 0^+$ $\Rightarrow 1 < \mathrm{Ord}_{0^+} f < p$ $\forall p > 1$

• $\mathrm{ord}_1 f$:

$\frac{f(x)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)^2 \cdot \frac{1}{x} \to -\frac{1}{2}$ se $x \to 1$ $\Rightarrow \mathrm{ord}_1 f = 2$

• $\mathrm{ord}_{+\infty} f$:

$\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^p} = -\frac{1}{2} \cdot (\ln x)^2 \cdot x^{p-1} \to \begin{cases} -\infty & p = 1 \\ 0 & p < 1 \end{cases}$ $\Rightarrow p < \mathrm{ord}_{+\infty} f < 1$ $\forall p < 1$

ESERCIZIO N. 2. Si ponga
$$E = \Big\{ z \in \mathbb{C} : \Re e(z^2 + iz\bar{z}) < \Im m(z^2 - iz\bar{z}) \Big\}.$$

(*i*) Si descriva e si rappresenti l'insieme E nel piano di Gauss.

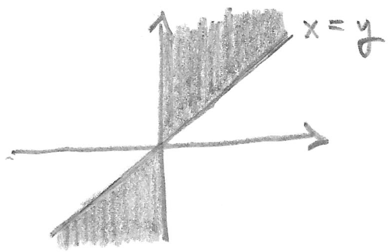
$z = x+iy$

$z^2+iz\bar{z} = x^2-y^2+2ixy + i(x^2+y^2) = (x^2-y^2)+i(x+y)^2$

$z^2-iz\bar{z} = x^2-y^2+2ixy - i(x^2+y^2) = (x^2-y^2)-i(x-y)^2$

$x^2-y^2 < -(x-y)^2 \iff x^2\cancel{-y^2} < -x^2\cancel{-y^2}+2xy \iff$

$2x^2-2xy<0 \iff 2x(x-y)<0 \iff \begin{cases} x<0 \\ x-y>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x>0 \\ x-y<0 \end{cases}$



(*ii*) Si determinino

- l'insieme dei punti di accumulazione di E:

$\{x+iy : x(x-y) \leq 0\}$

- l'insieme dei punti interni di E:

E

- l'insieme dei punti di frontiera di E:

$\{x+iy : x=0 \vee x=y\}$

(*iii*) Si stabilisca se

- E è chiuso:

no

- E è aperto:

sì

- E è limitato:

no

COGNOME e NOME ____________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Si ponga

$$f(x) = \begin{cases} |x|^e & \text{se } x \le 0, \\ \displaystyle\int_x^{ex} e^{-t^2}\, dt & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(*i*) Si calcolino, giustificando le risposte,

- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

$$\int_x^{ex} e^{-t^2} dt = (ex - x) e^{-\xi^2} \to 0 \quad \text{se } x \to 0^+$$
$$x \le \xi \le ex$$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

$$0 < \int_x^{ex} e^{-t^2} dt = (e-1) x e^{-\xi^2} \le (e-1) x e^{-x^2} \to 0 \quad \text{se } x \to +\infty$$
$$x \le \xi \le ex$$

- $f'_d(0) = e - 1$

$$\frac{1}{x} \int_x^{ex} e^{-t^2} dt = (e-1) e^{-\xi^2} \to e - 1, \quad \text{se } x \le \xi \le ex \to 0$$

- $f'_s(0) = 0$

$$\frac{|x|^e - 0}{x - 0} = \frac{|x|^e}{x} \to 0 \quad \text{se } x \to 0^-$$

(*ii*) Si determinino

- $f'(x) =$

$$\begin{cases} -|x|^{e-1} & x < 0 \\ e^{-e^2x^2+1} - e^{-x^2} = e^{-x^2}\left(e^{1-(e^2-1)x^2} - 1\right) & x > 0 \end{cases}$$

- i segni di f':

$f'(x) < 0$ se $x < 0$; $f'(x) > 0$ se $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e^2-1}}$; $f'(x) > 0$ se $x > \frac{1}{\sqrt{e^2-1}}$

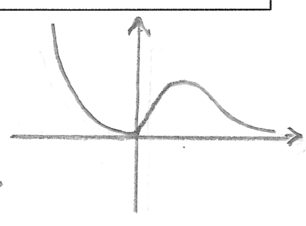
- la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:

f crescente se $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e^2-1}}$; f decrescente se $x < 0 \lor x > \frac{1}{\sqrt{e^2-1}}$

$\min f = 0$; $\sup f = +\infty$; $\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}$ pto di max rel.

- il numero delle soluzioni $x \in \text{dom} f$ dell'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

- $k < 0$: 0 sol.
- $k = 0$: 1 sol.
- $0 < k < f\left(\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}\right)$: 3 sol.
- $k = f\left(\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}\right)$: 2 sol.
- $k > f\left(\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}\right)$: 1 sol.



$$1 - (e^2-1)x^2 > 0 \iff x^2 < \frac{1}{e^2-1} \iff x < \sqrt{\frac{1}{e^2-1}}$$

ESERCIZIO N. 4. Si ponga,

$$f(x) = \frac{\ln(x+4)}{\sqrt{x}}.$$

(*i*) Si determini, giustificando la risposta, una primitiva di f sull'intervallo $]0, +\infty[$.

- $\displaystyle\int \frac{\ln(x+4)}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln(x+4) - 2\int \frac{\sqrt{x}}{x+4}dx$
- $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+4}dx = \left(\int \frac{2t^2}{t^2+4}dt\right)_{t=\sqrt{x}}$
- $\displaystyle\int \frac{t^2\pm 4}{t^2+4}dt = \int\left(1 - \frac{4}{t^2+4}\right)dt = t - 2\int\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}dt = t - 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{t}{2}\right)$
- $\displaystyle\int \frac{\ln(x+4)}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln(x+4) - 4\sqrt{x} + 8\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$

(*ii*) Si stabilisca se f è integrabile in senso generalizzato su $]0, 1]$ e in caso affermativo si calcoli $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

- $\mathrm{Ord}_{0^+} \dfrac{\ln(x+4)}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow f$ è int. in s.g. su $]0,1]$
- $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \lim_{y\to 0^+}\int_y^1 f(x)\,dx =$
  $\displaystyle= \lim_{y\to 0^+}\left(2\ln 5 - 4 + 8\,\mathrm{arctg}\frac{1}{2} - 2\sqrt{y}\ln(y+4) + 4\sqrt{y} - 8\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{y}}{2}\right)\right)$
  $= 2\ln 5 - 4 + 8\,\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$

(*iii*) Si stabilisca se f è integrabile in senso generalizzato su $]0, +\infty[$ e in caso affermativo si calcoli $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

- $\mathrm{ord}_{+\infty} \dfrac{\ln(x+4)}{\sqrt{x}} \lneqq 1$ e $f(x) \geq 0$ in $[1,+\infty[$

  $\Rightarrow f$ non è int. in s.g. su $[1,+\infty[$ e quindi neppure su $]0,+\infty[$.