Esame di Analisi matematica I - 9 CFU : esercizi
A.a. 2013-2014, sessione estiva, II appello
Corso prof. Omari

COGNOME ______________________ NOME ______________________

N. Matricola ______________________ Anno di corso ______________________

Corso di Studi in Ingegneria Industriale ○ Ingegneria Navale ○

ESERCIZIO N. 1.

(*i*) Si determinino, giustifcando la risposta,

- $\mathrm{ord}_0(\sqrt{1+2t} - \exp t)$

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi(t) = \sqrt{1+2t} - \exp t, & \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2t}} - \exp t, & \varphi'(0) = 0 \\ \varphi''(t) = -(1+2t)^{-3/2} - \exp t, & \varphi''(0) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{ord}_0(\sqrt{1+2t} - \exp t) = 2$$

- $\mathrm{ord}_0(\ln(1 - \ln(1-t)))$

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi(t) = \ln(1-\ln(1-t)), & \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(t) = \dfrac{-1}{1-\ln(1-t)} \cdot \dfrac{-1}{1-t}, & \varphi'(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{ord}_0(\ln(1-\ln(1-t))) = 1$$

(*ii*) Si calcoli, al variare di $\alpha, \beta \in]0, \infty[$, $\displaystyle\lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{1+2x^\alpha} - \exp(x^\alpha)}{\ln(1 - \ln(1 - x^\beta))}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+2x^\alpha} - \exp(x^\alpha)}{x^{2\alpha}} \cdot \frac{x^{2\alpha}}{x^\beta} \cdot \frac{x^\beta}{\ln(1-\ln(1-x^\beta))} = \begin{cases} 0 & \text{se } 2\alpha > \beta \\ -1 & \text{se } 2\alpha = \beta \\ -\infty & \text{se } 2\alpha < \beta \end{cases}$$

essendo $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+2t} - \exp t}{t^2} = -1$

e $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1-\ln(1-t))}{t} = 1$

Esame di Analisi matematica I - 9 CFU : esercizi

A.a. 2013-2014, sessione estiva, II appello

Corso prof. Omari

COGNOME ____________ NOME ____________

N. Matricola ____________ Anno di corso ____________

Corso di Studi in Ingegneria Industriale ○ Ingegneria Navale ○

ESERCIZIO N. 1.

(i) Si determinino, giustifcando la risposta,

- $\mathrm{ord}_0\big(2\sqrt{1+t}-\exp t\big)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{2\sqrt{1+t}-e^t}{t^0}=1 \Rightarrow \mathrm{ord}_0\left(2\sqrt{1+t}-e^t\right)=0$$

- $\mathrm{ord}_0\big(\ln(1-\ln(1-t))\big)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1-\ln(1-t))}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1-\ln(1-t))}{-\ln(1-t)}\cdot\frac{\ln(1-t)}{-t}=1$$

$$\Rightarrow \mathrm{ord}_0 \ln(1-\ln(1-t))=1$$

(ii) Si calcoli, al variare di $\alpha,\beta\in\,]0,\infty[$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{1+x^\alpha}-\exp(x^\alpha)}{\ln(1-\ln(1-x^\beta))}$. Per ogni $\alpha,\beta>0$,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{1+x^\alpha}-e^{x^\alpha}}{\ln(1-\ln(1-t))}=+\infty,$$ essendo $\ln(1-\ln(1-t))>0$ in un intorno di 0

ESERCIZIO N. 2. Si ponga

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} : \Re e\left(\frac{iz^2}{|z|-1}\right) \geq 0 \right\}.$$

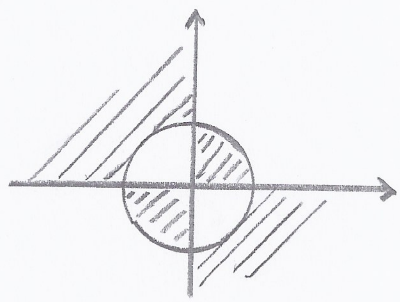
(*i*) Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E.

• $z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$

• $|z| \neq 1$: $\dfrac{iz^2}{|z|-1} = \dfrac{i(x^2-y^2+2ixy)}{|z|-1} = \dfrac{-2xy}{|z|-1} + i\,\dfrac{x^2-y^2}{|z|-1}$

$\Re e\left(\dfrac{iz^2}{|z|-1}\right) = \dfrac{-2xy}{|z|-1} \geq 0 \iff$

$\begin{cases} xy \leq 0 \\ |z| > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} xy \geq 0 \\ |z| < 1 \end{cases}$



(*ii*) Si determinino

• l'insieme dei punti di accumulazione di E:

$E \cup \{z : |z| = 1\}$

• l'insieme dei punti interni di E:

$E \setminus \{z : x = 0 \vee y = 0\}$

• l'insieme dei punti di frontiera di E:

$\{z : x = 0 \vee y = 0 \vee |z| = 1\}$

(*iii*) Si stabilisca se

• E è chiuso:

no

• E è aperto:

no

• E è limitato:

no

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Si ponga

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\tan x) & \text{se } x < 0, \quad (*) \\ \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(*i*) Si determinino

- il dominio di f: $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2} - k\pi : k \in \mathbb{N}\}$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (se esiste): non esiste ($\arctan(\tan x)$ π-periodica)
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (se esiste): $\ln 2$

$$\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \operatorname{arcsinh}(2x) - \operatorname{arcsinh} x = \ln\left(\frac{2x+\sqrt{1+4x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) \to \ln 2, \quad x \to +\infty$$

- $f'(x)$:
  - 1, se $x < 0 \wedge x \neq -\frac{\pi}{2} - k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$)
  - $\dfrac{2}{\sqrt{1+4x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{2\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{1+4x^2}\,\sqrt{1+x^2}}$, se $x > 0$
- $f'_s(0)$: 1 • $f'_d(0)$: 1
- i segni di f':

$f'(x) > 0$, se $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2} - k\pi : k \in \mathbb{N}^+\}$

- la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:
  - f crescente in $]-\frac{\pi}{2} - (k+1)\pi, -\frac{\pi}{2} - k\pi[$ per ogni $k \in \mathbb{N}$;
  - f crescente in $]-\frac{\pi}{2}, +\infty[$;
  - $\inf f = -\frac{\pi}{2}$; $\sup f = \frac{\pi}{2}$ (NB: $\ln 2 < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2 < e^{\pi/2}$)
- il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$:
  - $k \leq -\frac{\pi}{2}$: 0 sol.
  - $-\frac{\pi}{2} < k < \frac{\pi}{2}$: ∞ sol.
  - $k \geq \frac{\pi}{2}$: 0 sol.

(*) $\arctan(\tan x) = x$ se $-\frac{\pi}{2} < x < 0$;
$\arctan(\tan x) = x + (k+1)\pi$ se $-\frac{\pi}{2} - (k+1)\pi < x < -\frac{\pi}{2} - k\pi$ $\forall k \in \mathbb{N}$

COGNOME e NOME ________________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Si ponga

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\tan x) & \text{se } x < 0, \\ \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t}}\, dt & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(*i*) Si determinino

- il dominio di f: $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2} - k\pi \,:\, k \in \mathbb{N}\}$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ (se esiste): non esiste ($\arctan(\tan x)$ π-periodica)
- $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ (se esiste): $+\infty$

$$\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t}}\, dt = \frac{x}{\sqrt{1+c}} \geq \frac{x}{\sqrt{1+2x}} \underset{\text{se } x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad \text{essendo } x \leq c \leq 2x.$$

- $f'(x)$:
  - 1, se $x < 0 \wedge x \neq -\frac{\pi}{2} - k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$)
  - $\dfrac{2}{\sqrt{1+2x}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \dfrac{2\sqrt{1+x} - \sqrt{1+2x}}{\sqrt{1+2x}\,\sqrt{1+x}}$, se $x > 0$
- $f'_s(0)$: 1
- $f'_d(0)$: 1
- i segni di f':

$f'(x) > 0$, se $x \in \operatorname{dom} f$

- la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:
  - f crescente in $]-\frac{\pi}{2} - (k+1)\pi, -\frac{\pi}{2} - k\pi[$ per ogni $k \in \mathbb{N}$;
  - f crescente in $]-\frac{\pi}{2}, +\infty[$;
  - $\inf f = -\frac{\pi}{2}$; $\sup f = +\infty$
- il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$:
  - $k \leq -\frac{\pi}{2}$: 0 sol.
  - $-\frac{\pi}{2} < k < \frac{\pi}{2}$: ∞ sol.
  - $k \geq -\frac{\pi}{2}$: 1 sol.

ESERCIZIO N. 4. Si calcoli l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x^3+x^2+x+1}\,dx.$$

RISULTATO

0

SVOLGIMENTO

- $x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1)$

- $\dfrac{x-1}{x^3+x^2+x+1} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

$$x-1 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)$$
$$= (A+B)x^2+(B+C)x+(A+C)$$

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ B+C = 1 \\ A+C=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=0 \end{cases}$$

- $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3+x^2+x+1}\,dx = -\int\frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx$

$$= -\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$
$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}\right)$$

- $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x-1}{x^3+x^2+x+1}\,dx = \lim_{y\to+\infty}\int_0^{y}\frac{x-1}{x^3+x^2+x+1}\,dx =$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{y^2+1}}{x-1}\right)-\ln 1\right) = 0$$