Esame di Analisi matematica I - 9 CFU : esercizi
A.a. 2013-2014, sessione estiva, III appello
Corso prof. Omari

COGNOME ____________		NOME ____________	
N. Matricola ____________		Anno di corso ____________	
Corso di Studi in	Ingegneria Industriale ◯	Ingegneria Navale ◯	

ESERCIZIO N. 1. Si ponga, al variare di $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$,

$$f_k(x) = \int_k^{k+1} \frac{1}{t^x(t+1)}\,dt.$$

(i) Si determinino i valori di x per cui $f_k(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

• $k = 0$: $f_0(x) = \int_0^1 \frac{1}{t^x(t+1)}\,dt \in \mathbb{R} \iff x < 1$

• $k \geq 1$: $f_k(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

$f_k(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $k \in \mathbb{N} \iff x < 1$

(ii) Si determinino i valori di x per cui esiste finito $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

• $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \int_0^{n+1} \frac{1}{t^x(t+1)}\,dt$, per $x < 1$

• $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(t+1)}\,dt \in \mathbb{R} \iff 0 < x < 1$

(iii) Si calcoli $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(1/2)$.

• $\int \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}\,dt = \left(\int \frac{2u}{u(u^2+1)}\,du \right)_{u=\sqrt{t}} = 2 \arctan \sqrt{t} + c$

• $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}\,dt = 2\frac{\pi}{4} + 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$
$= \pi$

ESERCIZIO N. 2. Si ponga
$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} : \Re e\left(\frac{z^2 - |z|^2}{\Im m(iz)}\right) < 2 \right\}.$$

(*i*) Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E.

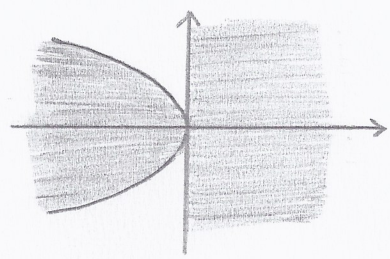
$z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$

$\Im m(iz) = x \neq 0$

$$\frac{z^2 - |z|^2}{\Im m(iz)} = \frac{x^2 - y^2 + 2ixy - x^2 - y^2}{x} = \frac{-2y^2}{x} + i2y$$

$$\Re e\left(\frac{z^2 - |z|^2}{\Im m(iz)}\right) = -\frac{2y^2}{x} < 2 \iff -\frac{y^2}{x} < 1 \iff$$

$$\begin{cases} -y^2 < x \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -y^2 > x \\ x < 0 \end{cases} \iff x > 0 \vee x < -y^2$$



(*ii*) Si determinino

- l'insieme dei punti di accumulazione di E:

$\{x + iy : x \geq 0 \vee x \leq -y^2\}$

- l'insieme dei punti interni di E:

E

- l'insieme dei punti di frontiera di E:

$\{x + iy : x = 0\} \cup \{x + iy : x = -y^2\}$

(*iii*) Si stabilisca se

- E è chiuso:

no

- E è aperto:

sì

- E è limitato:

no

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Si ponga
$$f(x) = x - x^2 + \ln(x+1).$$

(*i*) Si determinino

- il dominio di f: $]-1, +\infty[$
- $\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$
- $f'(x)$: $1 - 2x + \frac{1}{x+1} = \frac{-2x^2 - x + 2}{x+1}$
- i segni di f': $f'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}$;

$f'(x) > 0 \iff -1 < x < \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$; $f'(x) < 0 \iff x > \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$

- la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:

$f \nearrow$ su $]-1, \frac{-1+\sqrt{17}}{4}[$; $f \searrow$ $]\frac{-1+\sqrt{17}}{4}, +\infty[$; $\inf f = -\infty$;

$\max f = f\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right) > f(0) = 0$

(*ii*) Si provi che esiste uno e un solo $x_0 > 0$ tale che $f(x_0) = 0$ e si determinino i segni di f.

$f\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right) > 0$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; f continua e decrescente in $]\frac{-1+\sqrt{17}}{4}, +\infty[$ $\Rightarrow \exists!\, x_0 > \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ tale che $f(x_0) = 0$.

$f(x) < 0$ se $-1 < x < 0 \vee x > x_0$; $f(x) > 0$ se $0 < x < x_0$.

(*iii*) Si provi che f è concava sul suo domino.

$x - x^2$ concava e $\ln(x+1)$ concava $\Rightarrow x - x^2 + \ln(x+1)$ concava

ESERCIZIO N. 4. Si ponga

$$f(x) = \int_x^{2x} \Big(\int_t^0 \cos(s^2)\, ds \Big)\, dt.$$

(i) Si calcolino:

- $f'x) =$

$$2\int_{2x}^{0}\cos(s^2)\,ds - \int_{x}^{0}\cos(s^2)\,ds = \int_{0}^{x}\cos(s^2)\,ds - 2\int_{0}^{2x}\cos(s^2)\,ds$$

- $f''(x) =$

$$\cos(x^2) - 4\cos(4x^2)$$

- $f'''(x) =$

$$-2x\sin(x^2) - 32x\sin(4x^2)$$

(ii) Si determini il polinomio di Taylor-Maclaurin $p_{3,0}$ di f.

$f(0) = 0$; $f'(0) = 0$; $f''(0) = -3$; $f'''(0) = 0$

$$p_{3,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 = -3x^2$$

(iii) Si calcoli, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{p_{3,0}(x)}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{p_{3,0}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-3x^2 + E_3(x)}{-3x^2} = 1 + \lim_{x\to 0}\frac{E_3(x)}{-3x^2} = 1$$