Esame di Analisi matematica I - 9 CFU : esercizi
A.a. 2013-2014, sessione invernale, I appello
Corso prof. Omari

COGNOME ________________		**NOME** ________________	
N. Matricola ________________		**Anno di corso** ________________	
Corso di Studi in:	**Ingegneria Industriale** ○	**Ingegneria Navale** ○	

ESERCIZIO N. 1. Si ponga, al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x + b\,\mathrm{sign}(x+\pi) & \text{se } x < 0, \\ c\,e^x - \cos x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(*i*) Si determinino, giustificando la risposta, $a, b, c \in \mathbb{R}$ in modo che f sia derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}$.

• f continua in $\mathbb{R} \iff \begin{cases} b = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ 0 = c-1 \end{cases}$

• f derivabile in $\mathbb{R} \iff \begin{cases} b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \wedge\ f'_s(0) = f'_d(0) \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$

$$f'_s(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{a\sin x}{x} = a$$

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \cos x}{x} = 1$$

(*ii*) In corrispondenza ai valori a, b, c sopra individuati, si determinino, giustificando la risposta, gli intervalli in cui la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ è convessa.

$$F'(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ e^x - \cos x & x \geq 0 \end{cases}$$

$$F''(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ e^x + \sin x & x \geq 0 \end{cases}$$

$F''(x) > 0 \iff x > 0 \ \vee\ -\frac{\pi}{2} < x < 0 \ \vee\ -\frac{\pi}{2} - 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} - 2k\pi$,

con $k \in \mathbb{N}^+$.

ESERCIZIO N. 2. Si ponga

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{|z|}{i+z} \neq \bar{z} \right\}.$$

(*i*) Si descriva e si rappresenti l'insieme E nel piano di Gauss.

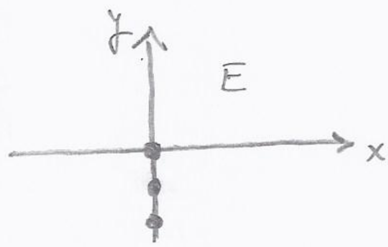
$\boxed{z \neq -i}$

$$\frac{|z|}{i+z} = \bar{z} \iff |z| = i\bar{z} + |z|^2 \iff \sqrt{x^2+y^2} = ix + y + x^2 + y^2 \iff$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = y + x^2 + y^2 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |y| = y + y^2 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = 0 \\ y \geq 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y^2 + 2y = 0 \\ y < 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

$E = \mathbb{C} \setminus \{0, -i, -2i\}$



(*ii*) Si determinino

- l'insieme dei punti di accumulazione di E:

$\mathbb{C}$

- l'insieme dei punti interni di E:

E

- l'insieme dei punti di frontiera di E:

$\{0, -i, -2i\}$

(*iii*) Si stabilisca se

- E è chiuso:

no

- E è aperto:

sì

- E è limitato:

no

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ________

ESERCIZIO N. 3. Si ponga
$$f(x) = \frac{x}{1-\ln x}.$$

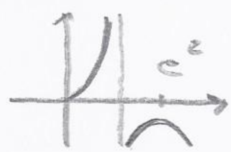
(*i*) Si determinino

- il dominio di f: $\{x : x>0 \wedge x \neq e\}$
- i segni di f: $f(x)>0$ se $0<x<e$; $f(x)<0$ se $x>e$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ • $\lim_{x\to e^-} f(x) = +\infty$ • $\lim_{x\to e^+} f(x) = -\infty$ • $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$
- $f'(x) = \dfrac{1-\ln x + 1}{(1-\ln x)^2} = \dfrac{2-\ln x}{(1-\ln x)^2}$
- i segni di f': $f'(x)>0$ se $0<x<e \vee e<x<e^2$;
  $f'(x)<0$ se $x>e^2$.
- la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:

$f \nearrow$ se $0<x<e \vee e<x<e^2$; $f \searrow$ se $x>e^2$;
$\inf f = -\infty$; $\sup f = +\infty$; e^2 pto di mass. rel.

(*ii*) Si determini il numero delle soluzioni $x \in \mathrm{dom} f$ dell'equazione $f(x)=k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$k < f(e^2) = -e^2$: 2 sol. $k>0$: 1 sol.
$k = -e^2$: 1 sol.
$-e^2 < k \leq 0$: 0 sol.



(*iii*) Si provi che f ristretta all'intervallo $]0,e[$ è invertibile e si determini il dominio della funzione inversa.

$f|_{]0,e[}$ crescente ; $f(]0,e[) =]0,+\infty[= \mathrm{dom}\left(f|_{]0,e[}\right)^{-1}$

(*iv*) Si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa nel punto $(\frac{1}{2e}, \frac{1}{e})$.

$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2e}\right) = \dfrac{1}{f'\left(\frac{1}{e}\right)} = \dfrac{1}{\frac{2+1}{2^2}} = \dfrac{4}{3}$; $y = \frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{2e}\right) + \frac{1}{e}$

$y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}\frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3e}$

$f\left(\frac{1}{e}\right) = \dfrac{\frac{1}{e}}{1+1} = \dfrac{1}{2e}$

ESERCIZIO N. 4. Si ponga,

$$f(x) = \int_x^{2x} \Big(\int_0^t t \sinh s \, ds \Big) dt.$$

(*i*) Si calcolino:

- $f'(x) = 2\int_0^{2x} 2x \sinh s \, ds - \int_0^x x \sinh s \, ds = 4x \int_0^{2x} \sinh s \, ds - x \int_0^x \sinh s \, ds$

  $\big(= 4x(\cosh(2x) - 1) - x(\cosh x - 1) = 4x \cosh(2x) - x\cosh x - 3x\big)$

- $f''(x) = 4\int_0^{2x} \sinh s \, ds + 8x \sinh(2x) - \int_0^x \sinh s \, ds - x \sinh x$

  $\big(= 4(\cosh(2x) - 1) + 8x\sinh(2x) - \cosh x + 1 - x\sinh x =$

  $= 4\cosh(2x) + 8x\sinh(2x) - \cosh x - x\sinh x - 3 \big)$

- $f'''(x) = 8\sinh(2x) + 8\sinh(2x) + 16x\cosh(2x) - 2\sinh x - x\cosh x$

  $= 16\sinh(2x) + 16x\cosh(2x) - 2\sinh x - x\cosh x$

- $f''''(x) = 16\cosh(2x) + 16\cosh(2x) + 16\cosh(2x) + 32x\sinh(2x) -$

  $-3\cosh x - x\sinh x =$

  $= 48\cosh(2x) + 32x\sinh(2x) - 3\cosh x - x\sinh x$

(*ii*) Si calcoli, giustificando la risposta, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4}$.

(Peano)

$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4} = \frac{f^{(IV)}(0)}{4!} = \frac{45}{24} = \frac{15}{8}$$

(*iii*) Si calcoli $f(1)$.

$$\int_1^2 \Big(\int_0^t t \sinh s \, ds\Big) dt = \int_1^2 t(\cosh t - 1) dt =$$

$$= \big[t \sinh t\big]_1^2 - \int_1^2 \sinh t \, dt - \Big[\frac{t^2}{2}\Big]_1^2 =$$

$$= 2\sinh 2 - \sinh 1 - \cosh 2 + \cosh 1 - \frac{3}{2}$$

$$\Big(= e^2 - e^{-2} - \cancel{\frac{e}{2}} + \frac{1}{2e} - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} + \cancel{\frac{e}{2}} + \frac{1}{2e} - \frac{3}{2} = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2e^2} + \frac{1}{e} - \frac{3}{2}\Big)$$