**Esame di Analisi matematica I - 9 CFU : esercizi**
**A.a. 2013-2014, sessione invernale, III appello**
**Corso prof. Omari**

| | |
|---|---|
| COGNOME ______________ | NOME ______________ |
| N. Matricola ______________ | Anno di corso ______________ |
| Corso di Studi in: Ingegneria Industriale ○ | Ingegneria Navale ○ |

**ESERCIZIO N. 1.** Si ponga

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 & \text{se } x < 0, \\ x - \ln(1+x) & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(*i*) Si provi che $f$ è di classe $C^3$ in $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} x - x^2 + x^3 & x<0 \\ 1 - \frac{1}{1+x} & x>0 \end{cases}; \quad f'_s(0) = 0 = f'_d(0) \Rightarrow \exists f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \begin{cases} 1 - 2x + 3x^2 & x<0 \\ \frac{1}{(1+x)^2} & x>0 \end{cases}; \quad f''_s(0) = 1 = f''_d(0) \Rightarrow \exists f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = \begin{cases} -2 + 6x & x<0 \\ \frac{-2}{(1+x)^3} & x>0 \end{cases}; \quad f'''_s(0) = -2 = f'''_d(0) \Rightarrow \exists f'''(0) = -2$$

(*ii*) Si determini il polinomio di Taylor-Maclaurin $p_{3,0}$ di $f$.

$$p_{3,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

(*iii*) Si determini il massimo $n \in \mathbb{N}$ per cui $f$ è di classe $C^n$ in $\mathbb{R}$.

$$f^{IV}(x) = \begin{cases} 6 & x<0 \\ \frac{6}{(1+x)^4} & x>0 \end{cases} \quad f^{IV}_s(0) = 6 = f^{IV}_d(0) \Rightarrow \exists f^{IV}(0) = 6$$

$$f^{V}(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{-24}{(1+x)^5} & x>0 \end{cases} \quad f^{V}_s(0) = 0 \neq -24 = f^{V}_d(0) \Rightarrow \nexists f^{V}(0)$$

Dunque $n = 4$.

**ESERCIZIO N. 2.**

($i$) Si determini l'insieme $A$ delle soluzioni $w \in \mathbb{C}$ dell'equazione $iw = |w|\bar{w}$.
(Suggerimento: si usi la rappresentazione polare.)

$w = [\rho, \vartheta]$, $i = [1, \frac{\pi}{2}]$

$iw = |w|\bar{w} \iff [1, \frac{\pi}{2}][\rho, \vartheta] = [\rho, 0][\rho, -\vartheta] \iff [\rho, \vartheta + \frac{\pi}{2}] = [\rho^2, -\vartheta]$

$$\iff \begin{cases} \rho = \rho^2 \\ \vartheta + \frac{\pi}{2} = -\vartheta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \iff \rho = 0 \vee \begin{cases} \rho = 1 \\ 2\vartheta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\iff \rho = 0 \vee \begin{cases} \rho = 1 \\ \vartheta = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k = 0, 1) \end{cases}$$

$w_0 = 0$; $w_1 = [1, -\frac{\pi}{4}]$; $w_2 = [1, \frac{3}{4}\pi]$

($ii$) Per ogni $w \in A$ si determinino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^2 = w|z|^2$.
(Suggerimento: si usi la rappresentazione polare.) $z = [\rho, \vartheta]$

$w_0 = 0$ : $z_0 = 0$

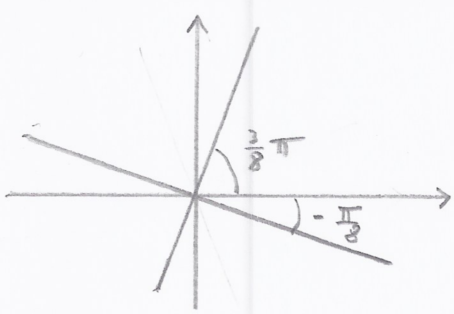
$w_1 = [1, -\frac{\pi}{4}]$ : $[\rho^2, 2\vartheta] = [1, -\frac{\pi}{4}][\rho^2, 0] \iff \begin{cases} \rho^2 = \rho^2 \\ 2\vartheta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$z_1 = [\rho, -\frac{\pi}{8}] \vee z_2 = [\rho, \frac{7}{8}\pi]$ $(\forall \rho \geq 0)$

$w_2 = [1, \frac{3}{4}\pi]$ : $[\rho^2, 2\vartheta] = [1, \frac{3}{4}\pi][\rho^2, 0] \iff \begin{cases} \rho^2 = \rho^2 \\ 2\vartheta = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$z_3 = [\rho, \frac{3}{8}\pi] \vee z_4 = [\rho, \frac{11}{8}\pi]$ $(\forall \rho \geq 0)$

($iii$) Si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme $B$ delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^2 = w|z|^2$ al variare di $w \in A$.



COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

**ESERCIZIO N. 3.** Si ponga, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{1+t^4}\,dt.$$

(*i*) Si provi che $f$ è pari.

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{t}{1+t^4}\,dt = \int_x^{2x} \frac{-(-s)}{1+(-s)^2}\,ds = \int_x^{2x} \frac{s}{1+s^4}\,ds = f(x)$$

(*ii*) Si determinino

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{1+t^4}\,dt = \frac{c}{1+c^4} \to 0, \qquad x \le c \le 2x \to +\infty$$

- $f'(x) =$

$$\frac{2\cdot 2x}{1+(2x)^4} - \frac{x}{1+x^4} = \frac{4x(1+x^4) - x(1+16x^4)}{(1+16x^4)(1+x^4)} = 3x\cdot\frac{1-4x^4}{(1+16x^4)(1+x^4)}$$

- i segni di $f'$: $f'(0) = f'(\pm\frac{1}{\sqrt2}) = 0$ ;

$f'(x) > 0$, $0 < x < \frac{1}{\sqrt2}$ ; $f'(x) < 0$, $x > \frac{1}{\sqrt2}$ ;
$f'(x) < 0$, $-\frac{1}{\sqrt2} < x < 0$ ; $f'(x) > 0$, $x < -\frac{1}{\sqrt2}$

- la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di $f$:

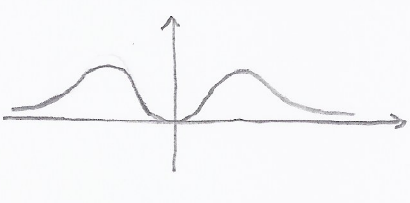
$f \nearrow$, $x < -\frac{1}{\sqrt2}$ ; $f \searrow$, $-\frac{1}{\sqrt2} < x < 0$ ; $f \nearrow$, $0 < x < \frac{1}{\sqrt2}$ ;
$f \searrow$, $x > \frac{1}{\sqrt2}$ ; $\pm\frac{1}{\sqrt2}$ pti di max. assoluto ;
$0$ pto di min. assoluto

- il numero delle soluzioni $x \in \mathrm{dom} f$ dell'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$k < 0$ : 0 sol. ; $0 < k < f(\pm\frac{1}{\sqrt2})$ : 4 sol. ; $k > f(\pm\frac{1}{\sqrt2})$ : 0 sol
$k = 0$ : 1 sol. ; $k = f(\pm\frac{1}{\sqrt2})$ : 2 sol. ;

- $\mathrm{ord}_0 f = 2$

$$\frac{f(x)}{x^2} \to \frac{3}{2} \overset{H}{\Leftarrow} \frac{f'(x)}{2x} \to \frac{3}{2}, \quad \text{se } x \to 0$$



(Osservazione:
$f(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(4x^2) - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(x^2)$)

**ESERCIZIO N. 4.** Si ponga, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \int_n^{+\infty} \frac{t+1}{e^t} dt.$$

(*i*) Si provi che $a_n \in \mathbb{R}$ per ogni $n$.

$\mathrm{ord}_{+\infty} \frac{t+1}{e^t}$ soprarcale $\Rightarrow \exists$ finito $\int_n^{+\infty} \frac{t+1}{e^t} dt$,

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(*ii*) Si calcoli, giustificando la risposta, $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

$$a_n = \int_n^0 \frac{t+1}{e^t} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t+1}{e^t} dt = -\int_0^n \frac{t+1}{e^t} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t+1}{e^t} dt$$

$$\to -\int_0^{+\infty} \frac{t+1}{e^t} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t+1}{e^t} dt = 0$$

se $n \to +\infty$

(*iii*) Si calcoli, giustificando la risposta, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

- $a_n = \lim_{x\to+\infty} \int_n^x \frac{t+1}{e^t} dt = (n+2)e^{-n}$, essendo

$$\int_n^x \frac{t+1}{e^t} dt = \left[-(t+1)e^{-t}\right]_n^x + \int_n^x e^{-t} dt = -(x+1)e^{-x} + (n+1)e^{-n} + \left[-e^{-t}\right]_n^x$$

$$= -(x+1)e^{-x} + (n+1)e^{-n} - e^{-x} + e^{-n} \to (n+2)e^{-n}$$

se $x \to +\infty$

- $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n+2} \cdot \frac{1}{e} = e^{\frac{1}{n}\ln(n+2)} \cdot \frac{1}{e} \to \frac{1}{e}$, se $n \to +\infty$