# APPUNTI DI ANALISI MATEMATICA

Pierpaolo Omari
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Trieste

Maurizio Trombetta
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Udine

# 1

# Logica, insiemi, applicazioni, relazioni

## 1.1 Logica delle proposizioni

La logica è la disciplina che analizza e formalizza i metodi di ragionamento. In questo paragrafo ci limiteremo a dare qualche cenno della *logica delle proposizioni* e, nel Paragrafo 1.3, della *logica dei predicati*, con l'obiettivo di introdurre un linguaggio che permetta di trattare i concetti matematici in modo chiaro e preciso (cioè senza le ambiguità tipiche del linguaggio comune).

La nozione di *proposizione* è assunta come primitiva (cfr. Paragrafo 1.2 sulla nozione di insieme). Informalmente possiamo dire che una *proposizione* è un enunciato del linguaggio comune, sintatticamente corretto, al quale sia possibile attribuire, in un determinato contesto, un valore di verità, sia cioè possibile stabilire se è *vero* o *falso*.

Non sono proposizioni i seguenti enunciati: «Studia!», «Che ore sono?», perchè non si può stabilire la loro verità o falsità. Sono invece proposizioni i seguenti enunciati: «3 è un numero dispari »; «3 è un numero pari»; «Il numero $12343^{847} + 98767^{51276} - 1$ è un numero primo». Infatti, il primo enunciato è vero, il secondo è falso, mentre il terzo ha certamente un suo valore di verità anche se appare difficile stabilire quale sia; sappiamo però che esistono delle tecniche per decidere se il numero sopra scritto è o non è primo.

Enunciati del tipo «Giulia è una bella ragazza» o «7 è un numero fortunato» non sono delle proposizioni, a meno che non si assegni un criterio per decidere chi è Giulia, quando una persona di sesso femminile è una "bella ragazza", o quando un numero è da considerarsi "fortunato".

Le proposizioni si indicano solitamente con lettere latine minuscole: $p$, $q$, $r$, ....

Accettiamo i due seguenti principi:

* ***principio di non contraddizione*:** una proposizione non può essere allo stesso tempo vera e falsa;
* ***principio del terzo escluso*:** se una proposizione è falsa, allora la sua negazione è vera e viceversa (non c'è una terza possibilità).

Come nel linguaggio comune, cosí anche in logica da proposizioni assegnate (che chiamiamo proposizioni *semplici*) si possono formare altre proposizioni piú complesse (che chiamiamo proposizioni *composte*). Nel linguaggio comune il collegamento avviene per mezzo di congiunzioni; in logica i termini di collegamento si chiamano *connettivi logici.*

Introdurremo cinque connettivi fondamentali. Uno di essi coinvolge una sola proposizione ed è perciò detto *unario*; gli altri legano due proposizioni ciascuno e sono quindi detti *binari.*

Il valore di verità di una proposizione composta si deduce dai valori di verità delle proposizioni semplici che la compongono. Per ottenere questo risultato si possono utilizzare le cosiddette *tavole di verità.* L'uso di queste tavole apparirà chiaro dagli esempi prodotti. Per esprimere il valore di verità di una proposizione, si usano solitamente i simboli "$V$" o "1" per "*vero*" e "$F$" o "0" per "*falso*".

**Definizione 1.1.** *Negazione* ($\neg$). Data una proposizione $p$, la *negazione* di $p$ è la proposizione $\neg p$ (si legge "*non* $p$"), che è vera se $p$ è falsa ed è falsa se $p$ è vera. La sua tavola di verità è la seguente:

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ |

**Definizione 1.2.** *Congiunzione* ($\wedge$). Date due proposizioni $p$ e $q$, la loro *congiunzione* è la proposizione $p \wedge q$ (si legge "$p$ *e* $q$") che è vera se $p$ e $q$ sono entrambi vere ed è falsa in ogni altro caso.

**Definizione 1.3.** *Disgiunzione* ($\vee$). Date due proposizioni $p$ e $q$, la loro *disgiunzione* è la proposizione $p \vee q$ (si legge "$p$ *o* $q$") che è vera se è vera *almeno una* delle proposizioni $p$ e $q$ mentre è falsa se $p$ e $q$ sono entrambe false.

Le tavole di verità delle proposizioni congiunzione e disgiunzione sono le seguenti:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |

**Osservazione 1.4.** Nella lingua italiana, "*o*" può avere due significati:

* significato *esclusivo* (latino *aut*), come nella frase: «Se sostengo un esame, o sono promosso o sono bocciato.» (Le due situazioni non possono verificarsi entrambi.)
* significato *inclusivo* (latino *vel*), come nella frase: «Se nella sessione estiva riesco a superare l'esame di Analisi e l'esame di Fisica, sono soddisfatto.» (Se li supero entrambi, tanto meglio!)

In matematica, salvo esplicito avviso del contrario, "*o*" ha sempre significato inclusivo.

**Esempio 1.5.** Consideriamo le due proposizioni: $p$ = «6 è un numero pari» e $q$ = «Milano è la capitale d'Italia». Naturalmente $p$ è vera e $q$ (attualmente) è falsa. Ne viene che $p \wedge q$ = «6 è un numero pari e Milano è la capitale d'Italia» è falsa, mentre $p \vee q$ = «6 è un numero pari o Milano è la capitale d'Italia» è vera.

**Esempio 1.6.** Siano $p$ e $q$ le proposizioni dell'esempio precedente. La proposizione $\neg q$ = «Non è vero che Milano è la capitale d'Italia» è vera. Ciò si esprime piú comodamente dicendo $\neg q$ = «Milano *non è* la capitale d'Italia». Le proposizioni $p \wedge (\neg q)$ e $p \vee (\neg q)$ sono entrambe vere.

Come abbiamo osservato, a partire da proposizioni semplici si possono ottenere nuove proposizioni composte di varia complessità combinando in modi diversi i connettivi logici. In questo caso, converrà usare parentesi per specificare l'ordine in cui i connettivi vengono usati.

**Esempio 1.7.** Date le proposizioni $p$, $q$, $r$, consideriamo le proposizioni

$$t = (p \wedge (\neg q)) \vee r, \quad s = (\neg q) \vee p$$

e ricaviamo le loro tavole di verità:

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg q$ | $p \wedge (\neg q)$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |

| $p$ | $q$ | $\neg q$ | $\neg q \vee p$ |
|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |

**Definizione 1.8.** Una proposizione composta è detta *tautologia* se è sempre vera, quali che siano i valori di verità delle proposizioni semplici che la componengono.

Una proposizione composta è detta *contraddizione* se è sempre falsa, quali che siano i valori di verità delle proposizioni semplici che la componengono.

**Esempio 1.9.** Dalla definizione di $\neg p$, si ha immediatamente che $p \wedge (\neg p)$ è una contraddizione (principio di non contraddittorietà), mentre $p \vee (\neg p)$ è una tautologia (principio del terzo escluso).

**Esempio 1.10.** Si constata facilmente che $(p \vee (\neg q)) \vee q$ è una tautologia, mentre $(p \wedge (\neg q)) \wedge q$ è una contraddizione.

**Definizione 1.11.** Due proposizioni composte $p$ e $q$ si dicono *logicamente equivalenti* se risulta che $p$ è vera se e solo se è vera $q$, cioè $p$ e $q$ hanno la stessa tavola di verità. In tal caso si scrive $p \equiv q$.

**Esempio 1.12.** Si ha $p \wedge q \equiv q \wedge p$, come si constata subito costruendo le tavola di verità.

**Esempio 1.13.** Ancora mediante le tavola di verità, si verifica che $p \wedge p \equiv p$, $p \vee p \equiv p$, $p \equiv \neg(\neg p)$.

**Definizione 1.14.** *Implicazione (materiale)* ($\Rightarrow$). Date due proposizioni $p$ e $q$, l'*implicazione (materiale)* $p \Rightarrow q$ (si legge "$p$ *implica* $q$" o "se $p$, allora $q$") è la proposizione che è falsa se $p$ è vera e $q$ è falsa ed è vera negli altri casi.

**Definizione 1.15.** *Doppia implicazione* ($\Leftrightarrow$). Date due proposizioni $p$ e $q$, la *doppia implicazione* $p \Leftrightarrow q$ (si legge "$p$ *se e solo se* $q$") è la proposizione che è vera se $p$ e $q$ sono entrambe vere o entrambe false ed è falsa negli altri casi.

Le tavole di verità delle proposizioni implicazione e doppia implicazione sono le seguenti:

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |

**Osservazione 1.16.** Le ultime due righe della tavola di verità dell'implicazione possono suscitare qualche perplessità. Per giustificarle, facciamo un esempio. Consideriamo le proposizioni: $p$ = «Piove» e $q$ = «Studio». La proposizione $p \Rightarrow q$ è dunque «Se piove, allora studio». Se faccio una tale promessa, in quale caso manco all'impegno? O, in altre parole, quando $p \Rightarrow q$ è falsa? Non avendo assunto impegni nel caso che non piova, $p \Rightarrow q$ è falsa se e solo se «Piove e non studio», ossia se e solo se $p$ è vera e $q$ è falsa. Pertanto $p \Rightarrow q$ è vera in tutii gli altri casi.

**Osservazione 1.17.** Si è visto che la proposizione $p \Rightarrow q$ si può leggere anche «Se $p$ allora $q$». Se questa proposizione è vera, si dice che $p$ è condizione *sufficiente* per $q$ e che $q$ è condizione *necessaria* per $p$.

**Osservazione 1.18.** Non bisogna attribuire all'implicazione un significato causale. Date due proposizioni $p$ e $q$, se $q$ è vera, si ha che sono vere sia la proposizione $p \Rightarrow q$, sia la proposizione $(\neg p) \Rightarrow q$. Per esempio: $p =$ «2 è dispari», $q =$ «$2 + 2 = 4$»; sono vere entrambi le proposizioni $p \Rightarrow q$ e $(\neg p) \Rightarrow q$.

**Osservazione 1.19.** Due proposizioni $p$ e $q$ sono logicamente equivalenti se e solo se $p \Leftrightarrow q$ è vera.

**Esempio 1.20.** Costruendo le relative tavole di verità, si verificano facilmente le seguenti proprietà:

$$\neg(\neg p) \equiv p; \quad p \wedge p \equiv p; \quad p \vee p \equiv p; \quad p \wedge q \equiv q \wedge p; \quad p \vee q \equiv q \vee p;$$
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r); \quad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r);$$
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r); \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r);$$
$$p \wedge (p \vee q) \equiv p; \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p;$$
$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q); \quad \neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q);$$
$$p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q; \quad \neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\neg q); \quad p \Rightarrow q \equiv (\neg q) \Rightarrow (\neg p);$$
$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p); \quad p \Leftrightarrow q \equiv ((\neg p) \vee q) \wedge ((\neg q) \vee p).$$

**Esempio 1.21.** Sempre costruendo le tavole di verità, si constata che sussistono le seguenti tautologie:

$$p \vee (\neg p); \quad \neg(p \wedge (\neg p)); \quad p \Rightarrow p;$$
$$(p \wedge q) \Rightarrow p; \quad p \Rightarrow (p \vee q); \quad (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p);$$
$$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q; \quad ((\neg q) \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p;$$
$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r);$$
$$(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p; \quad (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p).$$

Nel ragionamento logico-matematico spesso si usano queste due regole di deduzione:

* ***modus ponens:*** se sono vere le proposizioni $p$ e $p \Rightarrow q$, allora è vera anche la proposizione $q$;
* ***modus tollens:*** se sono vere le proposizioni $\neg q$ e $p \Rightarrow q$, allora è vera anche la proposizione $\neg p$, ossia se $q$ è falsa e $p \Rightarrow q$ è vera, allora $p$ è falsa.

Queste leggi derivano dal fatto che le proposizioni $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ e $((\neg q) \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p$ sono delle tautologie.

L'uso del modus ponens è il seguente: si parte da una proposizione vera $p$ (*ipotesi*), si prova la verità (in una data teoria) della proposizione $p \Rightarrow q$ (*teorema*) e si ottiene la verità della proposizione $q$ (*tesi*).

**Esempio 1.22.** Siano: $p =$ «$T$ è un triangolo con due lati uguali (cioè isoscele )», $q =$ «$T$ è un triangolo con due angoli uguali». Un teorema della geometria elementare afferma che $p \Rightarrow q$ è vera. Se, passando in rassegna dei triangoli, ne troviamo uno isoscele, cioè $p$ risulta vera, essendo vera $p \Rightarrow q$, si conclude (modus ponens) che anche $q$ è vera, cioè quel triangolo ha due angoli uguali.

**Definizione 1.23.** Siano $p$ e $q$ due proposizioni e consideriamo le quattro implicazioni

$$(1)\, p \Rightarrow q; \quad (2)\, q \Rightarrow p; \quad (3)\, \neg p \Rightarrow \neg q; \quad (4)\, \neg q \Rightarrow \neg p.$$

Se (1) è assunta come implicazione *diretta*, allora (2) è detta implicazione *inversa* (di (1)), (3) è detta implicazione *contraria* (di (1)) e (4) è detta implicazione *contronominale* (di (1)).

Si è visto nell'Esempio 1.20 che un'implicazione è logicamente equivalente alla sua contronominale; quindi, invece di dimostrare l'implicazione $p \Rightarrow q$, posso provare la sua contronominale $\neg q \Rightarrow \neg p$.

**Esempio 1.24.** Vogliamo dimostrare la seguente implicazione: *Se il numero naturale $2^p - 1$ è primo, allora il numero naturale $p$ è primo.* È piú facile provare la contronominale: *Se $p$ non è primo, allora $2^p - 1$ non è primo.* Sia dunque $p = rs$, con $r$ e $s$ entrambi maggiori di 1. Si ha:

$$2^p - 1 = 2^{rs} - 1 = (2^r)^s - 1 = (2^r - 1)((2^r)^{s-1} + (2^r)^{s-2} + \cdots + 1),$$

che non è primo, dato che è $2^r - 1 \geq 2^2 - 1 = 3$.

Notiamo che l'implicazione inversa non è vera; cioè, se $p$ è primo, non è detto che lo sia anche $2^p - 1$. Infatti, per $p = 11$, si ottiene $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$. I numeri primi del tipo $2^p - 1$ sono detti *di Mertens*.

Ricordiamo una tecnica di dimostrazione che risulta spesso utile in matematica: la dimostrazione *per assurdo*. Per dimostrare la validità di una proposizione $p$, si suppone vera la sua negazione $\neg p$. Si prova che è vera l'implicazione $\neg p \Rightarrow q$, dove $q$ è una proposizione che si sa essere falsa. Quindi l'implicazione contronominale $\neg q \Rightarrow p$ è vera. Essendo $\neg q$ vera, risulta (modus ponens) che $p$ è vera.

**Esempio 1.25.** Vogliamo dimostrare che è vera la proposizione $p =$ «L'equazione $x^2 = 2$ non ha alcuna soluzione nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali» o, equivalentemente, «Non esistono numeri interi positivi $m$ e $n$ tali che $(\frac{m}{n})^2 = 2$ ». Supponiamo, per assurdo, che esistano due numeri interi positivi $m$ e $n$ tali che $(\frac{m}{n})^2 = 2$. È lecito supporre $m$ e $n$ primi tra loro. Si ha $m^2 = 2n^2$. Ne viene che $m^2$ è divisibile per 2. Dunque $m$ è pari, cioè $m = 2k$ per qualche numero naturale $k$. Perciò risulta $4k^2 = 2n^2$ e quindi anche $n^2$ è divisibile per 2. Dunque pure $n$ è pari. Ma questo è assurdo, dato che $m$ e $n$ sono primi tra loro. Quindi, l'aver supposto vera $\neg p$ ci ha condotto a una contraddizione, cioè alla proposizione falsa $q =$ «$m$ e $n$ sono pari e primi tra loro». Si conclude dunque che la proposizione $p$ è vera.

## 1.2 Insiemi

Noi assumeremo la nozione di insieme come *primitiva*, cioè non riducibile ad altre piú elementari, come si fa del resto nella geometria elementare con le nozioni di punto, retta e piano e come fatto nel Paragrafo 1.1 con la nozione di proposizione. Useremo la parola *insieme* come sinonimo delle parole classe, collezione, aggregato, che potranno talvolta sostituirla. Un insieme è costituito da oggetti che si dicono *elementi* dell'insieme, i quali *appartengono* all'insieme.

Se $E$ è un insieme e $a$ è un elemento dell'insieme $E$, si scrive

$$a \in E$$

e si legge "$a$ appartiene a $E$". Naturalmente la scrittura $b \notin E$ sta a indicare che l'oggetto $b$ non appartiene all'insieme $E$, ossia che $b$ non è un elemento di $E$.

Se, per esempio, prendiamo come $E$ l'insieme dei numeri naturali pari, possiamo dire che 0, 4, 120 appartengono a $E$, mentre non gli appartengono 1, $-6$, $\pi$, la città di Trieste, la sedia su cui sono seduto.

Un insieme è completamente determinato dai suoi elementi, cosí che due insiemi che hanno gli stessi elementi sono lo stesso insieme. Per esempio, l'insieme formato dai numeri naturali che sono multipli di 6 è lo stesso che l'insieme dei numeri naturali pari che sono multipli di 3. Un insieme $E$ è quindi assegnato quando sono assegnati i suoi elementi ed è perciò, almeno teoricamente, possibile decidere se un dato oggetto è o non è elemento di $E$. Diciamo "teoricamente" perché, in pratica, la cosa può risultare difficile, se non addirittura impossibile.

Sia, per esempio, $E$ l'insieme dei numeri interi positivi primi, cioè maggiori di 1 e divisibili solo per 1 e per se stessi. Per decidere se un oggetto $x$ appartiene a $E$ basta vedere se, in primo luogo, è un numero intero positivo e, in secondo luogo, se è un numero primo. Tuttavia non è banale decidere se è o non è primo il numero intero positivo $12343^{847} + 987675^{1276} - 1$.

O peggio ancora. Si consideri la rappresentazione decimale di $\pi$ ($\pi = 3,1415926535897\ldots$). Sia ora $E$ l'insieme dei numeri naturali che si ottengono scrivendo un certo numero di cifre consecutive di questo sviluppo, partendo da un suo punto arbitrario. Appartengono, per esempio, a $E$ i numeri 3, 2, 314, 15926, 3141592653,.... Problema: $E$ contiene *tutti* i numeri naturali? Ebbene, questa è una domanda a cui non si sa dare una risposta. Ciononostante, noi accettiamo che $E$ sia un insieme.

Non ha senso invece parlare dell'insieme dei numeri reali positivi piccoli, a meno che non si assegni un criterio che permetta di decidere quando un numero reale è o non è piccolo.

Di solito indicheremo gli insiemi con lettere maiuscole $A$, $B$, $C$, $X$, ... e gli elementi con lettere minuscole $a$, $b$, $c$, $x$, ....

Un insieme si può descrivere, o formare, in due modi:

- elencando gli elementi che appartengono all'insieme (principio di estensione);
- assegnando una proprietà che caratterizza gli elementi dell'insieme (principio di astrazione)

Per esempio possiamo definire un insieme $E$ ponendo $E = \{a, e, i, o, u\}$ o $E = \{x : x$ è una lettera dell'alfabeto italiano e $x$ è una vocale$\}$ (quest'ultima si legge "$E$ è uguale all'insieme degli $x$ tali che $x$ è una lettera dell'alfabeto italiano e $x$ è una vocale").

Il secondo metodo è essenziale per la costruzione di insiemi infiniti, a meno di non essere approssimativi. Va comunque detto che, se la scrittura ottenuta è di chiara interpretazione, si usa talvolta l'elencazione anche per descrivere insiemi infiniti. Per esempio, l'insieme dei numeri naturali multipli di 3 può essere indicato con la scrittura $E = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$, anziché con la scrittura precisa $E = \{n : n$ è un numero naturale multiplo di $3\}$.

Notiamo ancora che l'ordine con cui si assegnano gli elementi di un insieme non ha alcuna importanza, cosí come non ha importanza se un elemento compare piú di una volta. Dunque gli insiemi $\{a, b, c, d\}$, $\{b, a, d, c\}$, $\{a, a, b, b, c, d\}$ sono lo stesso insieme.

Ci limitiamo a far notare che l'uso del principio di astrazione per la formazione di insiemi richiede alcune precauzioni. In particolare, la proprieà che caratterizza gli elementi dell'insieme deve essere un predicato definito su un assegnato insieme ambiente (o dominio) (cfr. Paragrafo 1.3). Mancando questo requisito si possono ottenere delle contraddizioni (*antinomie*). Per esempio, l'uso della proprietà «$x \notin x$», per definire, attraverso il principio di astrazione, "l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi" conduce a un paradosso: si tratta del celebre paradosso di Russell. La necessità di impedire l'insorgere di questo e altri paradossi ha portato alla formulazione assiomatica della teoria degli insiemi: si impongono delle regole, o assiomi, alle quali gli insiemi devono sottostare. Ovviamente a un livello elementare come il nostro tale teoria non verrà sviluppata; l'unica avvertenza sarà, come già sottolineato, quella di pensare che gli insiemi e gli elementi con cui opereremo stiano tutti in un insieme ambiente, che potrà anche variare di volta in volta e che noi sottintenderemo sempre assegnato.

Consideriamo l'insieme $E = \{x : x \neq x\}$. Questo insieme è privo di elementi. Esso prende il nome di insieme *vuoto* e si indica con il simbolo $\emptyset$.

Ribadiamo ancora il fatto che due insiemi $A$ e $B$ sono da riguardarsi come uguali ($A = B$) se e solo se sono costituiti dagli stessi elementi. Dunque, per controllare l'uguaglianza dei due insiemi $A$ e $B$, bisogna verificare che ogni elemento di $A$ appartiene a $B$ e che ogni elemento di $B$ appartiene ad $A$.

Siano, per esempio, $A$ l'insieme dei triangoli rettangoli e $B$ l'insieme dei triangoli per i quali sussiste la tesi del teorema di Pitagora. Risulta $A = B$. Infatti, come è ben noto, per ogni triangolo rettangolo vale il teorema di Pitagora e, come è un po' meno noto, ogni triangolo per cui sussiste la tesi del teorema di Pitagora è rettangolo.

Scriveremo talvolta ":=" al posto di "=" per specificare che ciò che sta a sinistra di ":=" è definito da ciò che sta a destra.

Introduciamo i seguenti simboli:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &:= \text{insieme dei numeri naturali;}\\
\mathbb{N}^+ &:= \text{insieme dei numeri naturali positivi;}\\
\mathbb{Z} &:= \text{insieme dei numeri interi;}\\
\mathbb{Z}^* &:= \text{insieme dei numeri interi non nulli;}\\
\mathbb{Q} &:= \text{insieme dei numeri razionali;}\\
\mathbb{Q}^+ &:= \text{insieme dei numeri razionali positivi;}\\
\mathbb{Q}^- &:= \text{insieme dei numeri razionali negativi;}\\
\mathbb{R} &:= \text{insieme dei numeri reali;}\\
\mathbb{R}^+ &:= \text{insieme dei numeri reali positivi;}\\
\mathbb{R}^- &:= \text{insieme dei numeri reali negativi;}\\
\mathbb{C} &:= \text{insieme dei numeri complessi;}\\
\mathbb{C}^* &:= \text{insieme dei numeri complessi non nulli.}
\end{aligned}$$

Quindi l'insieme dei numeri razionali [reali] maggiori o uguali a 0 sarà indicato con $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ [con $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$].

Dati due insiemi $A$ e $B$, se accade che ogni elemento di $A$ è anche elemento di $B$, diremo che $A$ è un *sottoinsieme* di $B$ e, simmetricamente, che $B$ è un *soprainsieme* di $A$. Diremo anche che $A$ è *contenuto* in $B$ e che $B$ *contiene* $A$. Indicheremo questo fatto con una delle notazioni

$$A \subseteq B, \quad B \supseteq A.$$

Se $A$ non è contenuto in $B$ (in simboli: $A \nsubseteq B$), allora esiste *almeno* un elemento $x$ che appartiene ad $A$ ma che non appartiene a $B$.

Per esempio, l'insieme $A$ dei numeri naturali primi non è contenuto nell'insieme $B$ dei numeri naturali dispari, dato che è $2 \in A$, ma $2 \notin B$.

Ovviamente, ogni insieme è contenuto in se stesso ($A \subseteq A$). Se è $A \subseteq B$, ma è $A \neq B$, cioè se ogni elemento di $A$ appartiene a $B$, ma c'è almeno un elemento di $B$ che non sta in $A$, si dice che $A$ è un sottoinsieme *proprio* di $B$. Ciò si esprime con la notazione $A \subset B$ o $A \subsetneqq B$.

Per definizione, si ha $A = B$ se e solo se risulta $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

È poi di immediata verifica che da $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ segue $A \subseteq C$.

Osserviamo ancora che, qualunque sia l'insieme $A$, si ha $\emptyset \subseteq A$. Infatti, se cosí non fosse, dovrebbe esistere un elemento $x$ tale che $x \in \emptyset$ e $x \notin A$, ma la prima delle due condizioni è chiaramente impossibile.

Dato un insieme $E$, ha senso considerare l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi. Si pone cioè

$$\mathscr{P}(E) := \{A : A \subseteq E\}\,.$$

È dunque $A \in \mathscr{P}(E)$ se e solo se è $A \subseteq E$.

Se, per esempio, è $E := \{1,\, 2,\, 3\}$, si ha

$$\mathscr{P}(E) := \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,\, 2\},\ \{1,\, 3\},\ \{2,\, 3\},\ E\}.$$

Dunque un insieme può anche essere visto come elemento di un altro insieme, per cosí dire, di grado gerarchico piú elevato.

Non si confondano i simboli $\subseteq$ e $\in$. Il primo dei due esprime una relazione intercorrente tra due insiemi, mentre il secondo lega fra loro oggetti aventi gerarchia diversa: elementi e insiemi.

## 1.3 Logica dei predicati

In matematica, anche a un livello elementare, si utilizzano enunciati che contengono delle variabili e il cui valore di verità dipende dagli oggetti che vengono sostituiti alle variabili.

Consideriamo i seguenti enunciati: $p(n)$ := «$n$ è un numero naturale pari», $q(x,\, y)$ := «Il numero naturale $x$ è un multiplo del numero naturale $y$». Questi enunciati non sono delle proposizioni, in quanto il loro valore di verità dipende, nel primo caso da $n$ e, nel secondo, da $x$ e $y$. Infatti, $p(2)$ è vera, mentre $p(5)$ è falsa; $q(12,\, 4)$ è vera, mentre $q(6,\, 4)$ è falsa. Espressioni come $p(x)$ o $q(x, y)$ vengono dette *predicati.*

Informalmente possiamo dire che un *predicato* definito su un insieme $U$ è un enunciato, dipendente da una (o piú di una) *variabile*, tale che sostituendo alla variabile un qualsiasi elemento di $U$ si ottiene una proposizione, ossia un enunciato vero o falso. L' insieme $U$ si dice *dominio*, o *universo*, del predicato.

Se $p(x)$ è un predicato definito in $U$, l'insieme formato dagli $x \in U$ tali che $p(x)$ è vera, cioè

$$P := \{x \in U : p(x)\} ,$$

si dice *insieme di verità* del predicato e $p(x)$ risulta essere la proprietà caratteristica di $P$ nell'universo $U$.

Come è già stato notato, quando si usa il principio di astrazione per formare un insieme si vuole che la proprietà che caratterizza gli elementi dell'insieme sia un predicato definito in un assegnato insieme (universo) $U$.

**Esempio 1.26.** Sia $p(x) :=$ «$x^2 > 9$», con $x \in \mathbb{R}$. Si ha: $p(3)$ è falsa e $p(4)$ è vera. L'insieme di verità di $p(x)$ è $P = \{x \in \mathbb{R} : (x < -3) \vee (x > 3)\}$. Sia poi $q(x, y) :=$ «$x^2 > y$», con $x, y \in \mathbb{R}$. Si ha: $q(1, 1)$ è falsa e $q(2, 2)$ è vera. L'insieme di verità di $q(x, y)$ è $Q := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 > y\big\}$.

Un predicato può essere trasformato in un altro predicato o in una proposizione applicando i *quantificatori.*

**Quantificatore universale:** $\forall :=$ *"per ogni".*

$(\forall x \in U)p(x)$ significa "*per ogni* $x \in U$, $p(x)$" (proposizione),
$(\forall x \in U)q(x, y)$ significa "*per ogni* $x \in U$, $q(x, y)$" (predicato in $y$).

**Quantificatore esistenziale:** $\exists :=$ *"esiste (almeno uno)".*

$(\exists x \in U)p(x)$ significa "*esiste almeno un* $x \in U$ *tale che* $p(x)$" (proposizione),
$(\exists x \in U)q(x, y)$ significa "*esiste almeno un* $x \in U$ *tale che* $q(x, y)$" (predicato in $y$).

Si usa anche il simbolo $\exists!$ che significa *esiste uno e un solo*:

$(\exists! x \in U)p(x)$ significa "*esiste esattamente un* $x \in U$ *tale che* $p(x)$".

**Esempio 1.27.** Siano $p(x)$ e $q(x, y)$ i predicati dell'Esempio 1.26. Si ha:
$(\forall x \in \mathbb{R})p(x)$ è una proposizione falsa.
$(\exists x \in \mathbb{R})p(x)$ è una proposizione vera.
$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})q(x, y)$ è una proposizione vera.
$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})q(x, y)$ è una proposizione falsa.
$(\exists x \in \mathbb{R})q(x, y)$ è un predicato nella variabile y.

**Esempio 1.28.** Si consideri il predicato $p(x, y) :=$ «La retta $x$ passa per il punto $y$». Notiamo che, in questo caso, le variabili $x$ e $y$ variano in insiemi diversi. Si ha:

$(\forall x)(\forall y)p(x, y)$ significa: «Ogni retta passa per tutti i punti»; proposizione falsa.

$(\forall x)(\exists y)p(x, y)$ significa: «Ogni retta passa per almeno un punto»; proposizione vera.

$(\exists x)(\forall y)p(x, y)$ significa: «Esiste una retta che passa per tutti i punti»; proposizione falsa.

$(\exists x)(\exists y)p(x, y)$ significa: «Esiste una retta che passa per almeno un punto»; proposizione vera.

In generale, cambiando l'ordine dei quantificatori, si ottengono proposizioni diverse.

**Esempio 1.29.** Sia $p(x,\ y)$ il predicato dell'esempio precedente. Si ha:

$(\forall x)(\exists y)p(x, y)$ significa: «Ogni retta passa per almeno un punto»; proposizione vera.

$(\exists y)(\forall x)p(x, y)$ significa: «Esiste un punto che appartiene a ogni retta»; proposizione falsa.

$(\exists x)(\forall y)p(x, y)$ significa: «Esiste una retta che passa per tutti i punti»; proposizione falsa.

$(\forall y)(\exists x)p(x, y)$ significa: «Per ogni punto passa almeno una retta»; proposizione vera.

**Esempio 1.30.** Le proposizioni che seguono affermano rispettivamente che la funzione $f(x) = x^3$ è iniettiva (cfr. Paragrafo 1.5) e che la funzione $g(x) = x^2$ è continua in 2 (cfr. Capitolo **??**):

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x \neq y \Rightarrow x^3 \neq y^3).$$
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(|x - 2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon).$$

Siano $p(x)$ e $q(x)$ due predicati definiti nello stesso universo $U$ e si consideri uno dei connettivi logici $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Ogni volta che si fissa $x \in U$, $p(x)$ e $q(x)$ sono due proposizioni che si possono comporre mediante quel connettivo logico. Restano cosí definite le operazioni logiche fra i predicati.

**Definizione 1.31.** *Implicazione logica.* Siano $p(x)$ e $q(x)$ due predicati definiti nello stesso universo $U$. Si dice che $p(x)$ *implica logicamente* $q(x)$ se è vera la proposizione

$$(\forall x \in U)(p(x) \Rightarrow q(x)).$$

In tal caso si dice che $p(x)$ è *condizione sufficiente* per $q(x)$ e che $q(x)$ è *condizione necessaria* per $p(x)$.

**Definizione 1.32.** *Equivalenza logica.* Siano $p(x)$ e $q(x)$ due predicati definiti nello stesso universo $U$. Si dice che $p(x)$ e $q(x)$ sono *logicamente equivalenti* se è vera la proposizione

$$(\forall x \in U)(p(x) \Leftrightarrow q(x)).$$

In tal caso si dice che $p(x)$ è condizione *necessaria e sufficiente* per $q(x)$ e si scrive $p(x) \equiv q(x)$.

Siano $p(x)$ e $q(x)$ due predicati definiti nello stesso universo $U$. Posto $P := \{x \in U : p(x)\}$ e $Q := \{x \in U : q(x)\}$, si ha che (cfr. Esercizio 1.99):

*$p(x)$ implica $q(x)$ se e solo se è $P \subseteq Q$;*
*$p(x)$ è equivalente a $q(x)$ se e solo se è $P = Q$.*

**Regole di negazione.** Sia $p(x)$ un predicato definito nell'universo $U$. Si ha:

- $\neg[(\forall x \in U)p(x)] \equiv (\exists x \in U)(\neg p(x))$;
- $\neg[(\exists x \in U)p(x)] \equiv (\forall x \in U)(\neg p(x))$.

Sia $P := \{x \in U : p(x)\}$. Dire che non è vera la proposizione $(\forall x \in U)p(x)$ equivale a dire che è $P \subsetneqq U$, che a sua volta equivale al fatto che esiste $(x \in U) \wedge (x \notin P)$, ossia che $(\exists x \in U)(\neg p(x))$. Simili considerazioni valgono per la seconda regola.

**Esempio 1.33.** Nell'insieme $U$ degli uomini sia $p(x) :=$ «$x$ è un uomo onesto». $(\forall x \in U)p(x)$ significa «Tutti gli uomini sono onesti», mentre $\neg[(\forall x \in U)p(x)]$ significa «Non tutti gli uomini sono onesti». Questo equivale a dire «Esiste almeno un uomo che non è onesto», ossia $(\exists x \in U)(\neg p(x))$.

**Teoremi e controsempi.** Un *teorema* è una proposizione che ha la forma di implicazione logica. Siano $p(x)$ e $q(x)$ due predicati definiti in $U$ e consideriamo i quattro teoremi:

$$\begin{gathered}(1)\,(\forall x \in U)(p(x) \Rightarrow q(x)); \quad (2)\,(\forall x \in U)(q(x) \Rightarrow p(x));\\ (3)\,(\forall x \in U)(\neg p(x) \Rightarrow \neg q(x)); \quad (4)\,(\forall x \in U)(\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)).\end{gathered}$$

Se (1) è assunto come teorema *diretto*, allora (2) è detto teorema *inverso* (di (1)), (3) è detto teorema *contrario* (di (1)) e (4) è detto teorema *contronominale* (di (1)). Risulta inoltre: (1) $\equiv$ (4) e (2) $\equiv$ (3).

Vogliamo ora negare l'implicazione

$$(\forall x \in U)(p(x) \Rightarrow q(x)).$$

Ricordando che

$$p(x) \Rightarrow q(x) \equiv (\neg p(x)) \vee q(x),$$

si ha

$$\begin{gathered}\neg[(\forall x \in U)(p(x) \Rightarrow q(x))] \equiv\\ \equiv \neg[(\forall x \in U)[(\neg p(x)) \vee q(x)] \equiv\\ \equiv (\exists x \in U)\neg[(\neg p(x)) \vee q(x)] \equiv\\ \equiv (\exists x \in U)[p(x) \wedge (\neg q(x))].\end{gathered}$$

Quindi negare la validità di un teorema significa trovare un controesempio.

**Esempio 1.34.** Siano $U = \mathbb{R}$, $p(x) :=$ «$x$ è pari» e $q(x) :=$ «$x$ è multiplo di 4». La proposizione

$$(\forall x \in U)(p(x) \Rightarrow q(x))$$

è falsa. È dunque vera la sua negazione

$$(\exists x \in U)[p(x) \wedge (\neg q(x))],$$

ossia, come ben si sa, «Esiste un numero naturale pari non divisibile per 4» (per esempio il numero 2).

**Esempio 1.35.** Posto

$$p := (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(|x-2| < \delta \Rightarrow |x^2-4| < \varepsilon),$$

si ha:

$$\begin{aligned}\neg p &\equiv \neg[(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(|x-2| < \delta \Rightarrow |x^2-4| < \varepsilon)] \equiv\\ &\equiv \neg[(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(\neg(|x-2| < \delta) \vee (|x^2-4| < \varepsilon))] \equiv\\ &\equiv (\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R})((|x-2| < \delta) \wedge (|x^2-4| \geq \varepsilon))].\end{aligned}$$

Vedremo fra poco che la proposizione $p$ è vera e che, pertanto, $\neg p$ è falsa.

**Esempio 1.36.** Consideriamo la proposizione $p := (\forall n \in \mathbb{N})(2^n \geq n^2)$. Per provare che questa è falsa, basta osservare che è $2^3 < 3^2$.

Per contro, la proposizione $(\forall n \in \mathbb{N})(n > 3 \Rightarrow 2^n \geq n^2)$ è vera. Dovremmo mostrare che la disuguaglianza sussiste per ogni $n \geq 4$. La via piú comoda per farlo è quella di usare il *principio di induzione* di cui parleremo nel prossimo capitolo (Paragrafo **??**). Rimandiamo dunque la dimostrazione ad allora.

**Esempio 1.37.** Proviamo che è vera la proposizione $p$ dell'Esempio 1.35. Fissiamo un $\varepsilon > 0$. La disuguaglianza $|x^2-4| < \varepsilon$ equivale alla $|x-2| \times |x+2| < \varepsilon$. Se ci accontentiamo di cercare un $\delta < 1$, da $|x-2| < \delta$ abbiamo $|x+2| < 5$. È dunque sufficiente trovare gli $x$ per cui è $5|x-2| < \varepsilon$. Risolvendo questa disequazione, si trova $2 - \frac{\varepsilon}{5} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{5}$. Basta perciò prendere un $\delta < \min(1, \frac{\varepsilon}{5})$.

## 1.4 Operazioni fra insiemi

Come si è detto in precedenza, penseremo sempre gli insiemi con cui si opera come sottoinsiemi di un insieme universo $U$.

**Definizione 1.38.** Dati due insiemi $A$ e $B$, si chiama loro *intersezione* l'insieme formato da tutti e soli gli elementi che appartengono sia ad $A$ che a $B$. Questo insieme si indica con il simbolo $A \cap B$. È dunque

$$A \cap B := \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

**Esempio 1.39.** Siano $r$ e $s$ due rette di un piano pensate come insiemi di punti. La loro intersezione è l'insieme dei punti comuni. L'insieme $r \cap s$ consta dunque di un solo punto se le due rette sono incidenti, è l'insieme vuoto se $r$ e $s$ sono parallele e distinte, mentre coincide con $r$ se è $r = s$.

**Esempio 1.40.** L'insieme $E := \{x : x^2 - 4 < 0\}$ è dato dall'intersezione dei due insiemi $A := \{x : x > -2\}$ e $B := \{x : x < 2\}$.

Se è $A \cap B = \emptyset$, i due insiemi $A$ e $B$ sono detti fra loro *disgiunti.*
Si constata facilmente che è:

$$A \cap A = A; \quad A \cap B = B \cap A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset;$$
$$A \cap B \subseteq A; \quad A \cap B = A \text{ se e solo se } A \subseteq B.$$

Si può, naturalmente, definire l'intersezione anche di piú di due insiemi. Per esempio, si pone

$$A \cap B \cap C := \{x : (x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C)\}\,.$$

Più in generale, per ogni numero naturale $n$, sia $A_n$ un sottoinsieme dell'insieme universo $U$. Si pone

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n := \{x : x \in A_n, \text{ per ogni } n\}\,.$$

**Definizione 1.41.** Dati due insiemi $A$ e $B$, si chiama loro *unione* (o *riunione*) l'insieme formato da tutti e soli gli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi $A$ e $B$. Questo insieme si indica con il simbolo $A \cup B$. È dunque

$$A \cup B := \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}\,.$$

**Esempio 1.42.** Siano $A$ e $B$ gli insiemi di numeri naturali formati, rispettivamente, dai multipli di 2 e dai multipli di 3. L'insieme $A \cup B$ è formato da tutti i numeri naturali pari e dai multipli dispari di 3. L'insieme $A \cap B$ è formato dai multipli di 6.

**Esempio 1.43.** L'insieme $E := \{x : x^2 - 4 > 0\}$ è dato dall'unione dei due insiemi $A := \{x : x < -2\}$ e $B := \{x : x > 2\}$.

Si constata facilmente che è:

$$A \cup A = A; \quad A \cup B = B \cup A; \quad A \cup \emptyset = A;$$
$$A \cup B \supseteq B; \quad A \cup B = B \text{ se e solo se } A \subseteq B.$$

Si può, naturalmente, definire l'unione anche di piú di due insiemi. Per esempio, si pone

$$A \cup B \cup C := \{x : (x \in A) \vee (x \in B) \vee (x \in C)\}.$$

Più in generale, per ogni numero naturale $n$, sia $A_n$ un sottoinsieme dell'insieme universo $U$. Si pone

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n := \{x : x \in A_n, \text{ per almeno un } n\}.$$

**Definizione 1.44.** Dati due insiemi $B$ e $A$, si chiama *insieme differenza fra $B$ e $A$*, l'insieme

$$B \setminus A := \{x : (x \in B) \wedge (x \notin A)\}.$$

Se poi è $A \subseteq B$, l'insieme $B \setminus A$ si chiama *complementare di $A$ rispetto a $B$* e lo si indica anche con $\mathcal{C}_B A$. Il complementare di $A$ rispetto all'insieme universo $U$ si indica semplicemente con $\mathcal{C}(A)$ o con $\widetilde{A}$.

**Esempio 1.45.** Siano: $A$ l'insieme dei numeri naturali pari: $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e $\mathbb{Z}$ l'insieme degli interi relativi. L'insieme $\mathcal{C}_{\mathbb{N}} A$ è formato dai numeri naturali dispari, mentre l'insieme $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}} A$ è costituito dai numeri naturali dispari e dagli interi negativi.

**Esempio 1.46.** Se $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali e se è $U = \mathbb{R}$ (= insieme dei numeri reali), allora $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ è l'insieme dei numeri irrazionali.

**Esempio 1.47.** Siano: $A$ l'insieme dei numeri naturali pari e $B$ quello dei numeri primi. L'insieme $A \setminus B$ è costituito da tutti i numeri naturali pari diversi da 2.

Sono di immediata verifica le seguenti proprietà:

$$\mathcal{C}(\mathcal{C}(A)) = A; \quad \mathcal{C}(U) = \emptyset; \quad \mathcal{C}(\emptyset) = U; \quad A \cap \mathcal{C}(A) = \emptyset; \quad A \cup \mathcal{C}(A) = U.$$

**Definizione 1.48.** Dati due insiemi $A$ e $B$, si chiama loro *insieme prodotto (cartesiano)*, e si indica con $A \times B$, l'insieme delle *coppie ordinate* $(a,\, b)$ con $a$ appartenente ad $A$ e $b$ appartenente a $B$; in simboli:

$$A \times B := \{(a,\, b) : (a \in A) \wedge (b \in B)\}\,.$$

In particolare, l'insieme $A \times A := \{(a,\, b) : (a \in A) \wedge (b \in A)\}$ si indica anche con $A^2$.

Si può, naturalmente, definire il prodotto anche di piú di due insiemi. Per esempio, si pone

$$A \times B \times C := \{(a,\, b,\, c) : (a \in A) \wedge (b \in B) \wedge (c \in C)\}\,.$$

Com'è ben noto, l'insieme dei punti di una retta si può porre in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali (*coordinate cartesiane*). Cosí i punti di un piano [dello spazio] si possono mettere in corrispondenza biunivoca con le coppie di numeri reali, ossia con $\mathbb{R}^2$ [con le terne di numeri reali, ossia con $\mathbb{R}^3$].

Si tenga presente che se $a$ e $b$ sono due elementi (distinti) di un insieme $E$, si ha $(a, b) \neq (b, a)$. Per esempio, in $\mathbb{R}^2$ si ha $(2,\, 3) \neq (3,\, 2)$.

**Definizione 1.49.** Sia $E$ un insieme non vuoto e siano $A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n$ sottoinsiemi di $E$. Diremo che gli insiemi $A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n$ formano una *partizione di $E$ in $n$ sottoinsiemi (o classi)* se:

1. $A_i \neq \emptyset$ per ogni $i$;
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ se è $i \neq j$;
3. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E$.

Ossia: gli $A_i$ non sono vuoti e ogni $x$ di $E$ appartiene ad uno e uno solo dei sottoinsiemi dati.

Questa definizione può essere facilmente estesa anche al caso di infiniti sottoinsiemi.

**Esempio 1.50.** Sia $E = \mathbb{N}$. I due sottoinsiemi $A := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è pari}\}$ e $B := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è dispari}\}$ formano una partizione di $\mathbb{N}$ in 2 classi.

**Esempio 1.51.** Sia $E$ l'insieme dei punti di un piano. Le rette parallele ad una retta data formano una partizione di $E$ in un numero infinito di classi. Per contro, le rette passanti per un punto non formano una partizione di $E$, dato che l'intersezione di due di queste rette è diversa dall'insieme vuoto.

**Esempio 1.52.** Sia ancora $E = \mathbb{N}$. Si ponga ora: $A := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è pari}\}$, $B := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è primo}\}$, $C := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è dispari non primo}\}$. Questi 3 insiemi *non* costituiscono una partizione di $\mathbb{N}$; infatti, pur essendo $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$, si ha $A \cap B \neq \emptyset$.

## 1.5 Applicazioni

**Definizione 1.53.** Dati due insiemi $E$ ed $E'$ non vuoti, si chiama *applicazione* o *funzione di $E$ in $E'$* ogni legge $f$ che ad *ogni* elemento $x \in E$ associa *uno e un solo* elemento $x' \in E'$. L'insieme $E$ è detto *dominio* di $f$, mentre $E'$ è detto *codominio* di $f$.

Per indicare che $f$ è un'applicazione di $E$ in $E'$ si usa la notazione $f : E \to E'$. Per esprimere il fatto che $f$ associa all'elemento $x \in E$ l'elemento $x' \in E'$, si scrive $x' = f(x)$. L'elemento $x'$ è detto l'*immagine* di $x$. Useremo anche la notazione $x \mapsto x'$.

Si tenga presente che, per assegnare una funzione, è necessario assegnare il dominio $E$, il codominio $E'$ e la legge $f$ e che questi tre oggetti individuano la funzione; quindi modificando anche uno solo di essi si modifica la funzione.

**Esempio 1.54.** La legge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ espressa da $f(n) = n - 1$ *non* definisce una funzione, dato che non esiste un corrispondente di 0. La stessa $f$ definisce invece una funzione di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$.

**Esempio 1.55.** La legge $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ espressa da $f(x) = y$ se e solo se è $y^2 = x$ *non* definisce una funzione, dato che, per esempio, al numero 4 associa sia il 2 che il $-2$.

**Esempio 1.56.** Le seguenti leggi definiscono invece delle funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = 2; \quad f(x) = x^2; \quad f(x) = \frac{x-1}{x^2+1};$$
$$f(x) = \log(1+x^2); \quad f(x) = \sin^2 x + \cos^3 x.$$

**Esempio 1.57.** La legge $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ definisce una funzione dell'insieme $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ in $\mathbb{R}$.

**Esempio 1.58.** La legge che a ogni circonferenza di un piano associa il suo centro definisce un'applicazione dell'insieme $A$ delle circonferenze di quel piano nell'insieme $B$ dei punti del piano stesso.

**Esempio 1.59.** Sia $A$ un insieme di persone nate in Italia. Anche la legge che a ogni elemento di $A$ associa il comune in cui è nato definisce un'applicazione di $A$ nell'insieme $B$ dei comuni italiani.

A noi interessano, in particolare, le applicazioni che hanno come codominio un insieme numerico; a tali applicazioni riserveremo, di regola, il nome di *funzioni.* In tal caso, all'elemento $f(x)$ si dà anche il nome di *valore* di $f$ in $x$.

Sia data un'applicazione $f : E \to E'$. L'insieme $f(E) := \{f(x) : x \in E\}$ ($\subseteq E'$) prende il nome di *insieme immagine* di $f$. È dunque, per definizione, $f(E) = \{x' \in E' : (\exists x \in E)(f(x) = x')\}$. Analogamente, se è $A \subseteq E$, si chiama *immagine di $A$ tramite $f$* l'insieme $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$.

Un'applicazione $f : E \to E'$ è detta *costante* se esiste $c' \in E'$ tale che $f(x) = c'$ per ogni $x \in E$.

L'applicazione $f : E \to E$ definita da $f(x) = x$ per ogni $x \in E$ è detta *applicazione identica* o *identità* di $E$ e si indica con $I_E$.

Un'applicazione $f : \mathbb{N} \to E$ è detta *successione* di elementi di $E$. In luogo di $f(n)$ si usa solitamente la notazione $a_n$; la successione si indica con $(a_n)_n$. Per esempio, la successione per cui è $(f(n) =)a_n = n^2$, si indica con $(n^2)_n$.

Si osservi che, in generale, a un'applicazione non è richiesto né che sia $f(E) = E'$, né che a elementi distinti di $E$ vengano associati elementi distinti di $E'$.

**Definizione 1.60.** Un'applicazione $f : E \to E'$ è detta *iniettiva* se a elementi distinti di $E$ vengano associati elementi distinti di $E'$, ossia se

$$(\forall x_1 \in E)(\forall x_2 \in E)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)),$$

cioè (implicazione contronominale)

$$(\forall x_1 \in E)(\forall x_2 \in E)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Ciò equivale a dire che, per ogni $x' \in E'$, esiste *al piú un* $x \in E$ tale che $f(x) = x'$.

In termini di equazioni l'iniettività si esprime dicendo che per ogni $x' \in E'$ l'equazione $f(x) = x'$ ha *al piú una* soluzione $x \in E$ (e quindi vi è unicità della soluzione).

Per esempio, l'applicazione dell'Esempio 1.57 è iniettiva, mentre quelle degli Esempi 1.58 e 1.59 non lo sono.

**Definizione 1.61.** Un'applicazione $f : E \to E'$ è detta *suriettiva* se l'insieme immagine $f(E)$ coincide con $E'$, ossia se

$$(\forall x' \in E')(\exists x \in E)(f(x) = x').$$

Ciò equivale a dire che per ogni $x' \in E'$ esiste *almeno un* $x \in E$ tale che $f(x) = x'$.

In termini di equazioni la suriettività si esprime dicendo che per ogni $x' \in E'$ l'equazione $f(x) = x'$ ha *almeno una* soluzione $x \in E$ (e quindi vi è esistenza della soluzione).

Per esprimere il fatto che l'applicazione $f : E \to E'$ è suriettiva, si dice che $f$ è un'applicazione di $E$ *su* $E'$.

Per esempio, l'applicazione dell'Esempio 1.58 è suriettiva, mentre quella dell'Esempio 1.57 non lo è.

**Definizione 1.62.** Un'applicazione $f : E \to E'$ è detta *biiettiva* se è iniettiva e suriettiva, ossia se

$$(\forall x' \in E')(\exists! x \in E)(f(x) = x').$$

Ciò equivale a dire che per ogni $x' \in E'$ esiste *esattamente un* $x \in E$ tale che $f(x) = x'$.

In termini di equazioni la biiettività si esprime dicendo che per ogni $x' \in E'$ l'equazione $f(x) = x'$ ha *esattamente una* soluzione $x \in E$ (e quindi vi è esistenza e unicità della soluzione).

Per esempio, è biiettiva l'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$.

**Definizione 1.63.** Data l'applicazione $f : E \to E'$ e detto $A$ un sottoinsieme di $E$, l'applicazione che a ogni elemento $x$ di $A$ associa l'elemento $f(x) \in E'$ è detta *restrizione* di $f$ ad $A$; essa si indica col simbolo $f\big|_A$ o, quando non c'è possibilità di equivoco, ancora con $f$.

Sia ancora $A \subset E$ e sia $f$ un'applicazione di $A$ in $E'$. ogni $f^* : E \to E'$ tale che $f^*\big|_A = f$ è detta un *prolungamento* di $f$ a $E$.

Sia per esempio data l'applicazione $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}.$$

Per ottenere un prolungamento di $f$ a tutto $\mathbb{R}$, basta considerare una qualunque funzione $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_c(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \neq -1, \\ c & \text{se } x = -1. \end{cases}$$

**Definizione 1.64.** Sia $f : E \to E'$ un'applicazione biiettiva. L'applicazione di $E'$ in $E$ che a ogni elemento $x'$ di $E'$ associa l'unico elemento $x \in E$ tale che $f(x) = x'$ è detta *applicazione inversa* di $f$; essa si indica col simbolo $f^{-1}$. Dunque, per definizione, si ha

$$(\forall x \in E)(\forall x' \in E')(f^{-1}(x') = x \Leftrightarrow f(x) = x').$$

Si tenga presente che, se $f$ non è biiettiva, non può esistere un'applicazione inversa. Tuttavia è spesso utile costruire una funzione per cosí dire "imparentata" con $f$ che risulti invece invertibile.

Se $f$ non è suriettiva, per renderla tale basta sostituire al codominio $E'$ l'insieme immagine $f(E)$. Se $f$ non è iniettiva, per renderla tale si può considerare una sua opportuna restrizione. Abbinando i due procedimenti, si ottiene un'applicazione biiettiva che è, come si diceva, imparentata con quella di partenza. Questo procedimneto si dice di *inversione forzata.*

**Esempio 1.65.** L'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ non è biiettiva. Per ottenere un'applicazione biiettiva, si restringe $f$ all'insieme $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e si assume quest'ultimo insieme anche come codominio. Insomma la funzione $x^2$ non è biiettiva fra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$, ma lo è fra $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. L'inversa della funzione $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definita da $f(x) = x^2$ è la funzione *radice quadrata.*

**Esempio 1.66.** L'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin x$ non è biiettiva. Per ottenere un'applicazione biiettiva, si assume come codominio l'intervallo $J = \{y : -1 \leq y \leq 1\}$ e si restringe $f$ all'intervallo $I = \left\{x : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$. Naturalmente, questa restrizione non è l'unica possibile, ma è la piú naturale. L'inversa della funzione $f : I \to J$, definita da $f(x) = \sin x$ è la funzione *arco seno.*

Sia data un'applicazione $f : E \to E'$ e sia $A'$ un sottoinsieme di $E'$. Si chiama *controimmagine* di $A'$ il sottoinsieme $f^{-1}(A')$ di $E$ definito da $f^{-1}(A') := \{x \in E : f(x) \in A'\}$.

**Esempio 1.67.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Si ha:

$$f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}; \quad f^{-1}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$
$$f^{-1}(\{x' : -1 < x' \leq 9\}) = \{x : -3 \leq x \leq 3\}; \quad f^{-1}(\{-2\}) = \emptyset.$$

Non si confonda la controimmagine con l'applicazione inversa. Quest'ultima opera sugli elementi di $E'$ e ha senso solo se $f$ è biiettiva, mentre la controimmagine opera sui sottoinsiemi di $E'$ e si può definire in ogni caso.

Sia ancora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$. Sappiamo che questa funzione non è invertibile. Non ha dunque senso scrivere $f^{-1}(4)$, mentre si è visto che è $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$.

**Definizione 1.68.** Siano date le due applicazioni $f : E \to E'$ e $g : E' \to E''$. Si può costruire un'applicazione $h : E \to E''$ ponendo $h(x) := g(f(x))$ per ogni $x \in E$. L'applicazione $h$ è detta applicazione *composta* di $f$ e $g$; essa si indica col simbolo $g \circ f$.

**Esempio 1.69.** Siano: $E = \mathbb{R}^+$, $E' = E'' = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log x$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(u) = -u^2$. L'applicazione composta $h = g \circ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è definita da $h(x) = -\log^2 x$.

Si badi che, in questo caso, non è definita un'applicazione che si possa indicare con $f \circ g$. Infatti questa dovrebbe essere un'applicazione $k$ definita da $k(u) = \log(-u^2)$ che non ha senso.

**Esempio 1.70.** Siano: $E = E' = E'' = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + 1$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(u) = u^2$. In questa situazione, esistono sia la funzione composta $g \circ f$ sia la $f \circ g$. Si ha:

$$(g \circ f)(x) = (x+1)^2; \quad (f \circ g)(x) = x^2 + 1.$$

Se ne deduce che, in generale, è $g \circ f \neq f \circ g$.

**Esempio 1.71.** Siano: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1 - x^2$ e $g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $g(u) = \sqrt{u}$. Non esiste l'applicazione composta $g \circ f$, dato che $f$ assume anche valori negativi. Si può però comporre con $g$ la restrizione di $f$ al sottoinsieme $A\,(\subset \mathbb{R})$ formato dagli $x$ per cui è $1 - x^2 \geq 0$, ossia agli $x$ per cui è $-1 \leq x \leq 1$. L'applicazione composta $h : A \to \mathbb{R}$ è definita da $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

**Definizione 1.72.** Data l'applicazione $f : E \to E'$, l'insieme $\mathcal{G}(f) := \{(x,\, f(x)) : x \in E\}$ $(\subseteq E \times E')$ è detto *grafico* di $f$.

Un sottoinsieme $\mathcal{G}$ di $E \times E'$ è il grafico di una funzione se e solo se

$$(\forall x \in E)(\exists! x' \in E')((x,\, x') \in \mathcal{G}).$$

Posto, per esempio, $I := \{x : -1 \leq x \leq 1\}$, l'insieme

$$H := \big\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\big\} \ (\subset I^2)$$

non è il grafico di una funzione dato che, appartengono a $H$ sia $(0,\, -1)$ sia $(0,\, 1)$. Se però si considera l'insieme

$$H' := \big\{(x, y) : (x^2 + y^2 = 1) \wedge (y \geq 0)\big\} \ (\subset I^2),$$

questo è il grafico della funzione $f : I \to I$ definita da $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

## 1.6 Relazioni binarie

**Definizione 1.73.** Si chiama *relazione binaria* in un insieme non vuoto $E$ ogni predicato $\rho(x, y)$ avente come dominio il prodotto cartesiano $E \times E$. Se per una coppia ordinata $(x, y) \in E \times E$ la proposizione $\rho(x, y)$ è *vera* si dice che l'elemento $x$ *è in relazione con* l'elemento $y$ e si scrive $x \rho\, y$. Indicando con $\mathcal{R}$ l'insieme di verità del predicato $\rho(x, y)$, cioè

$$\mathcal{R} := \{(x, y) \in E \times E : \rho(x, y)\},$$

si ha che $x$ è in relazione con $y$ se e solo se $(x, y) \in \mathcal{R}$. L'insieme $\mathcal{R}$ si dice *grafico* della relazione binaria $\rho$.

Spesso, invece di scrivere $x \rho\, y$, si usa interporre fra $x$ e $y$ un segno particolare. Per esprimere il fatto che nell'insieme $E$ è definita la relazione $\rho$, si usa la scrittura $(E,\, \rho)$.

**Esempio 1.74.** Diamo alcuni esempi di relazioni binarie.

1. Uguaglianza fra gli elementi di un insieme ($=$).
2. Inclusione fra i sottoinsiemi di un insieme ($\subseteq$).
3. Parallelismo fra le rette di un piano o dello spazio ($//$)
4. Ortogonalità fra le rette di un piano ($\perp$).
5. "Essere minore o uguale a" fra numeri reali ($\leq$).
6. "Essere minore di" fra numeri reali ($<$).
7. Divisibilità fra numeri naturali positivi ($\lhd$).
8. "Essere fratello di" (nel senso di avere in comune almeno un genitore) in un insieme di persone.
9. "Distare meno di 100 *km* da" in un insieme di città.

Una relazione binaria $\rho$ in un insieme $E$ può godere di alcune proprietà.

**Proprietà riflessiva.** Una relazione binaria $\rho$ è detta *riflessiva* se *ogni* elemento di $E$ è in relazione con se stesso. In simboli:

$$(\forall x \in E)(x \rho\, x).$$

Fra le relazioni precedenti le sole non riflessive sono la n. 4 e la n. 6.

**Proprietà simmetrica.** Una relazione binaria è detta *simmetrica* se da $x$ in relazione con $y$ segue che anche $y$ è in relazione con $x$. In simboli:

$$(\forall x \in E)(\forall y \in E)(x\rho\, y \Rightarrow y\rho\, x).$$

Le relazioni n. 1, 3, 4, 8 e 9 sono simmetriche, le altre no.

**Proprietà antisimmetrica.** Una relazione binaria $\rho$ è detta *antisimmetrica* se da $x$ in relazione con $y$ e $y$ in relazione con $x$ segue che è $x = y$. In simboli:

$$(\forall x \in E)(\forall y \in E)[((x\rho\, y) \wedge (y\rho\, x)) \Rightarrow x = y].$$

Le relazioni n. 1, 2, 5, 6 e 7 sono antisimmetriche, le altre no.

L'uguaglianza è l'unica relazione che è al tempo stesso simmetrica e antisimmetrica.

**Proprietà transitiva.** Una relazione binaria $\rho$ è detta *transitiva* se da $x$ in relazione con $y$ e $y$ in relazione con $z$ segue che $x$ è in relazione con $z$. In simboli:

$$(\forall x \in E)(\forall y \in E)(\forall z \in E)[((x\rho\, y) \wedge (y\rho\, z)) \Rightarrow x\rho\, z].$$

Fra le relazioni precedenti le sole non transitive sono le n. 4, 8 e 9.

Accenniamo solo al fatto che, come si parla di relazioni binarie, si può parlare anche di relazioni *ternarie*, *quaternarie*, ..., cioè di relazioni che coinvolgono 3, 4, ... elementi di un insieme.

Sia $E$ l'insieme dei punti di un piano. Un esempio di relazione fra terne di elementi di $E$ è quella di "essere allineati". Un esempio di relazione fra quaterne di elementi di $E$ è quella di "appartenere a una medesima circonferenza".

La nozione di relazione binaria su un insieme $E$ ammette una facile generalizzazione. Dati due insiemi $E$ ed $E'$ non vuoti si chiamerà *relazione binaria fra gli elementi di* $E$ *e quelli di* $E'$ ogni predicato $\rho(x, y)$ avente come dominio il prodotto cartesiano $E \times E'$. In modo ovvio si estende la nozione di grafico di una relazione fra $E$ ed $E'$. Se per esempio è $E' := \mathscr{P}(E)$, una relazione fra $E$ ed $E'$ è quella di appartenenza.

Le applicazioni di $E$ in $E'$ sono particolari relazioni binarie fra $E$ ed $E'$. Una relazione binaria $\rho$ fra $E$ ed $E'$ è un'applicazione di $E$ in $E'$ se e solo se, per ogni $x$, esiste uno e un solo $y$ tale che $x \rho y$, cioè $(x,\, y) \in \mathcal{R}$. In questo caso, $\mathcal{R}$ è il grafico dell'applicazione.

Noi ci occuperemo esclusivamente di relazioni binarie su un insieme $E$. Anzi ci limiteremo a due tipi particolari di queste: le relazioni di *equivalenza* e le relazioni d'*ordine*.

## 1.7 Relazioni di equivalenza

**Definizione 1.75.** Si chiama *(relazione di) equivalenza* in un insieme non vuoto $E$ ogni relazione binaria su $E$ che sia riflessiva, simmetrica e transitiva.

Data un'equivalenza su un insieme $E$, diremo che due elementi $a$ e $b$ in relazione sono fra loro *equivalenti*; esprimeremo il fatto scrivendo $x \sim y$.

L'uguaglianza è chiaramente un'equivalenza che viene detta equivalenza *discreta*.

**Esempio 1.76.** Diamo qualche altro esempio di equivalenza.

1. Il parallelismo fra rette o fra piani (//).
2. Sia $E := \{(p,\, q) : (p \in \mathbb{Z}) \wedge (q \in \mathbb{Z}^*)\}$; dunque $E$ è l'insieme di tutte le frazioni. In $E$ si definisce la ben nota relazione di equivalenza $(p,\, q) \sim (r,\, s) \Leftrightarrow ps = qr$.
3. La relazione di congruenza fra i segmenti dello spazio.
4. In un insieme di persone, la relazione "essere fratelli", ma nel senso di avere in comune entrambi i genitori.
5. Fra numeri reali: $x \sim y$ se e solo se $x - y$ è un multiplo intero di $2\pi$.
6. Fra numeri reali: $x \sim y$ se e solo se $x - y$ è un numero intero.
7. Dato un insieme non vuoto $E$, si dichiarino fra loro equivalenti tutti gli elementi di $E$. Si ottiene una relazione di equivalenza detta equivalenza *nulla*.

**Definizione 1.77.** Sia $\sim$ un'equivalenza in un insieme $E$. Per ogni $x \in E$ si definisce

$$[x] := \{y \in E : x \sim y\}\,;$$

questi sottoinsiemi di $E$ prendono il nome di *classi dell'equivalenza* data.

**Teorema 1.78.** *Sia $\sim$ un'equivalenza in un insieme $E \neq \emptyset$.*

1. *Per ogni $x \in E$, si ha $[x] \neq \emptyset$.*
2. *Si ha $x \sim y$ se e solo se è $[x] = [y]$.*
3. *Si ha $x \not\sim y$ se e solo se è $[x] \cap [y] = \emptyset$.*
4. *Le classi dell'equivalenza costituiscono una partizione di $E$.*

*Dimostrazione.* 1. Essendo $x \sim x$, si ha $x \in [x]$.

2. Sia $x \sim y$. Da $z \in [x]$ segue $x \sim z$, da cui $z \sim x \sim y$ e quindi $z \sim y$, ossia $y \sim z$ e, in fine, $z \in [y]$. L'inclusione opposta si prova allo sesso modo.

Sia ora $[x] = [y]$. È dunque $y \in [x]$, da cui $x \sim y$.

3. Sia ora $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ Esiste dunque $z \in [x] \cap [y]$. Si ottiene: $(x \sim z) \wedge (y \sim z)$, da cui $x \sim z \sim y$ e, in fine, $x \sim y$. La tesi segue subito dalla (2).

4. Basta osservare che ogni elemento di $E$ appartiene a una classe dell'equivalenza e che da $[x] \neq [y]$ segue $[x] \cap [y] = \emptyset$. □

**Definizione 1.79.** Sia data su un insieme $E$ un'equivalenza $\sim$. L'insieme $\{[x] : x \in E\}$ $(\subseteq \mathscr{P}(E))$ delle classi di equivalenza prende il nome di insieme *quoziente* di $E$ rispetto all'equivalenza data. Esso si indica con $E/\!\sim$.

Passare da $E$ a $E/\!\sim$ comporta il riguardare certi sottoinsiemi di $E$ come elementi di un nuovo insieme. Spesso in matematica si danno dei nomi a questi nuovi elementi. Questo modo di procedere si chiama *definizione per astrazione.*

**Esempio 1.80.** Sia $E$ l'insieme delle rette dello spazio e sia $\sim$ la relazione di parallelismo. Agli elementi di $E/\!\sim$ si dà il nome di *direzioni.*

**Esempio 1.81.** Sia $E$ l'insieme dei piani dello spazio e sia $\sim$ ancora la relazione di parallelismo. Agli elementi di $E/\!\sim$ si dà il nome di *giaciture.*

**Esempio 1.82.** Nell'insieme $E := \{(p,\, q) : (p \in \mathbb{Z}) \wedge (q \in \mathbb{Z}^*)\}$ di tutte le frazioni sia $\sim$ l'equivalenza definita da $(p,\, q) \sim (r,\, s) \Leftrightarrow ps = qr$. Agli elementi di $E/\!\sim$ si dà il nome di *numeri razionali.*

**Esempio 1.83.** Sia $E$ l'insieme dei segmenti dello spazio e sia $\sim$ la relazione di congruenza. Agli elementi di $E/\sim$ si dà il nome di *lunghezze*.

**Esempio 1.84.** Sia $E$ l'insieme dei segmenti orientati dello spazio e sia $\sim$ la relazione che proclama equivalenti due segmenti se e solo se sono congruenti e hanno uguali anche direzione e verso. Agli elementi di $E/\sim$ si dà il nome di *vettori*.

## 1.8 Relazioni d'ordine

**Definizione 1.85.** Si chiama *relazione d'ordine* o *ordinamento* in un insieme non vuoto $E$ ogni relazione binaria su $E$ che sia riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Se $a$ è in relazione con $b$ si dice che $a$ *precede* $b$, o $b$ *segue* $a$, e si scrive, per esempio, $a \vdash b$ .

**Esempio 1.86.** Diamo alcuni esempi di relazioni d'ordine.

1. La relazione d'inclusione "$\subseteq$" in $\mathscr{P}(E)$.
2. La relazione "$\leq$" in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$.
3. La relazione di divisibilità fra numeri naturali positivi definita da $a \lhd b$ se e solo se $a$ è un divisore di $b$.

**Definizione 1.87.** Sia $(E, \vdash)$ un insieme ordinato. Se accade che comunque si fissino due elementi $a$, $b$ di $E$ si ha $(a \vdash b) \vee (b \vdash a)$, si dice che la relazione è di ordine *totale*. Se invece esistono almeno due elementi $a$ e $b$ fra loro *inconfrontabili*, ossia tali che non risulti né $a \vdash b$ né $b \vdash a$, si parla di ordinamento *parziale*.

Per esempio, l'insieme $(\mathscr{P}(E), \subseteq)$ è totalmente ordinato se e solo se $E$ non contiene piú di un elemento. Infatti, se in $E$ esistono due elementi $a$ e $b$, si ha $\{a\} \not\subseteq \{b\}$ e $\{b\} \not\subseteq \{a\}$.

La relazione $\leq$ in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ è d'ordine totale.

Naturalmente, un sottoinsieme $X$ di un insieme parzialmente ordinato $E$ può risultare totalmente ordinato. Per esempio, sappiamo che se è $E := \{a,\ b,\ c\}$, l'insieme $(\mathscr{P}(E), \subseteq)$ è parzialmente ordinato; per contro, il suo sottoinsieme $X := \{\emptyset,\ \{a\},\ \{a,\ b\}, E\}$ è totalmente ordinato.

Data in un insieme $E$ una relazione d'ordine $\vdash$, si può definire una nuova relazione, in certo qual modo equivalente (cioè con lo stesso grado di informazione) a quella data, ponendo $a < b$ se e solo se è $(a \vdash b) \wedge (a \neq b)$.

Il caso piú interessante è quello in cui si parte dalla relazione $\leq$ fra numeri (in particolare in $\mathbb{N}$) ottenendo cosí l'usuale relazione di $<$.

Una relazione $<$ gode delle seguenti proprietà:

1. Proprietà *antiriflessiva:* $(\forall x \in E)(x \not< x)$, cioè *"nessun elemento è in relazione con se stesso"*.
2. Proprietà *transitiva:* $(\forall x \in E)(\forall y \in E)(\forall z \in E)[((x < y) \wedge (y < z)) \Rightarrow x < z]$.

A una tale relazione si dà il nome di *relazione d'ordine in forma antiriflessiva.*

Si osservi che in per una relazione d'ordine in forma antiriflessiva si ha $(\forall x \in E)(\forall y \in E)(x < y \Rightarrow y \not< x)$.

Viceversa, partendo da una relazione d'ordine in forma antiriflessiva $<$, si ottiene una relazione d'ordine riflessiva $\vdash$ ponendo $a \vdash b$ se e solo se è $(a < b) \vee (a = b)$.

**Definizione 1.88.** Sia $(E, \vdash)$ un insieme ordinato. Un elemento $m \in E$ si dice *minimo*, o *primo*, elemento di $E$ se $m$ precede tutti gli elementi di $E$. Si scrive $m = \min E$.

Analogamente, un elemento $M \in E$ si dice *massimo*, o *ultimo*, elemento di $E$ se $M$ segue tutti gli elementi di $E$. Si scrive $M = \max E$.

**Teorema 1.89.** *Se in un insieme ordinato $(E, \vdash)$ esiste minimo* [*massimo*] *esso è unico.*

*Dimostrazione.* Se $m$ e $m'$ sono minimi di $E$, si ha $(m \vdash m') \wedge (m' \vdash m)$, da cui $m = m'$. Analogamente per il massimo. □

**Esempio 1.90.** Qualunque sia l'insieme $E$, l'insieme $(\mathscr{P}(E), \subseteq)$ ha minimo $m = \emptyset$ e massimo $M = E$. L'insieme $(\mathbb{N}, \leq)$ ha minimo, lo zero, ma non ha massimo. In $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ non c'è né minimo né massimo.

**Definizione 1.91.** Siano $(E, \vdash)$ un insieme ordinato e $A$ un sottoinsieme di $E$. Se esiste un elemento $L \in E$ che segue tutti gli elementi di $A$, si dice che $L$ è una l*imitazione superiore* o un *maggiorante* di $A$. In tal caso si dice che $A$ è un sottoinsieme *superiormente limitato* di $E$.

Analogamente, se esiste un elemento $l \in E$ che precede tutti gli elementi di $A$, si dice che $l$ è una *limitazione inferiore* o un *minorante* di $A$. In tal caso si dice che $A$ è un sottoinsieme *inferiormente limitato* di $E$.

Un sottoinsieme $A$ di $E$ è detto *limitato* se ammette sia limitazioni inferiori che superiori.

Siano $(E, \vdash)$ un insieme ordinato e $A$ un sottoinsieme superiormente limitato di $E$. Se $L$ è una limitazione superiore di $A$, ogni elemento $L'$ che segua $L$ è ancora una limitazione superiore di $A$. Interessa vedere se fra le limitazioni superiori di $A$ ce n'è una minima. In maniera simmetrica, interessa vedere se l'insieme, supposto non vuoto, delle limitazioni inferiori di un sottoinsieme $A$ di $E$ ha massimo.

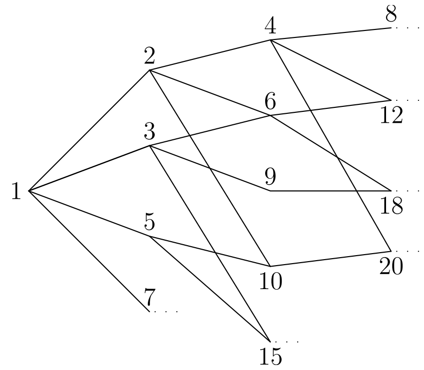
**Definizione 1.92.** Siano $(E, \vdash)$ un insieme ordinato e $A$ un sottoinsieme superiormente limitato di $E$. Se l'insieme delle limitazioni superiori di $A$ ha minimo, questo è detto l'*estremo superiore* di $A$ ed è indicato col simbolo $\sup A$.

Analogamente: Se $A$ è un sottoinsieme inferiormente limitato di $E$ e se l'insieme delle limitazioni inferiori di $A$ ha massimo, questo è detto l'estremo inferiore di $A$ ed è indicato col simbolo $\inf A$.

Chiaramente, se un sottoinsieme $A$ di $(E, \vdash)$ ha massimo, questo è anche l'estremo superiore di $A$. L'insieme $B$ dell'Esempio 1.95 mostra che l'estremo superiore di un insieme può ben non appartenergli. Anzi, l'estremo superiore viene introdotto proprio come "surrogato" del massimo.

**Esempio 1.93.** Vedremo nel prossimo Capitolo che in $\mathbb{N}$ o in $\mathbb{Z}$ un insieme $A$ ha massimo [minimo] se e solo se è superiormente [inferiormente] limitato. Ne viene, per quanto appena detto che un sottoinsieme $A$ di $\mathbb{N}$ o di $\mathbb{Z}$ ha estremo superiore [inferiore] se e solo se ha massimo [minimo].

**Esempio 1.94.** Sia $(\mathbb{N}^+, \lhd)$ l'insieme dei numeri naturali positivi ordinato per divisibilità. Se $A$ è un suo sottoinsieme finito, allora esso è superiormente limitato e ammette anche estremo superiore dato dal minimo comune multiplo dei suoi elementi. Se $A$ è infinito, esso è superiormente illimitato. Un qualunque sottoinsieme non vuoto $A$ è inferiormente limitato (da 1) e ha estremo inferiore dato dal massimo comune divisore dei suoi elementi.




**Esempio 1.95.** Nell'insieme $(\mathbb{Q}\ \leq)$, sia $A := \{x \in \mathbb{Q}^+ : x^2 < 2\}$. $A$ è superiormente limitato (per esempio da 2) ma non ha estremo superiore in $\mathbb{Q}$.

Posto invece $B := \{x \in \mathbb{Q}^+ : x^2 < 4\}$, si ha $\sup B = 2 \notin B$.

Dunque, non tutti i sottoinsiemi superiormente limitati di $\mathbb{Q}$ hanno estremo superiore. Vedremo che nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali le cose vanno altrimenti.

## 1.9 Esercizi

**Esercizio 1.96.** Costruendo le relative tavole di verità, si provino le proprietà dell'Esempio 1.20.

**Esercizio 1.97.** Costruendo le relative tavole di verità, si provi che le proposizioni dell'Esempio 1.21 sono effettivamente delle tautologie.

**Esercizio 1.98.** Interpretare le proposizioni dell'Esempio 1.20 e dell'Esempio 1.21 ponendo $p =$ «Piove», $q=$ «Soffia il vento», $r=$ «Fa freddo».

**Esercizio 1.99.** Dati due predicati $p(x)$ e $q(x)$ definito nell'insieme universo $U$, si ponga $P := \{x : p(x)\}$ e $Q := \{x : q(x)\}$. Si provi che:

1. $p(x)$ implica $q(x)$ se e solo se si ha $P \subseteq Q$.
2. $p(x)$ è equivalente a $q(x)$ se e solo se si ha $P = Q$.

**Esercizio 1.100.** Sia $U$ l'insieme dei gatti e si ponga $p(x) =$ «$x$ è bianco», $q(x) =$ «$x$ ha la coda lunga». Si esprimano mediante quantificatori e connettivi le seguenti proposizioni:

Tutti i gatti bianchi hanno la coda lunga.
Non è vero che tutti i gatti bianchi hanno la coda lunga.
Nessun gatto con la coda lunga è bianco.
Esiste un gatto bianco con la coda lunga.
Esiste un gatto con la coda lunga che non è bianco.
Esiste un gatto che non è bianco e non ha la coda lunga.
Ogni gatto o è bianco o ha la coda lunga.

**Esercizio 1.101.** Si neghino le seguenti proposizioni:

Tutti i cretesi mentono.
Domani o studio o vado al mare.
Se sei promosso, ti regalo il motorino.

**Esercizio 1.102.** Detto $U$ l'insieme dei primi 20 numeri naturali positivi, si considerino i suoi sottoinsiemi: $A := \{2k : k = 1, 2, \dots, 10\}$, $B := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C := \{3k : k = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si descrivano gli insiemi:

$$A \cap B; \quad A \cup B, \quad A \cap \mathcal{C}(B); \quad A \cup \mathcal{C}(B),$$
$$(A \cap B) \cap C; \quad A \cap (B \cap C); \quad (A \cup B) \cup C; \quad A \cup (B \cup C);$$
$$(A \cap B) \cup C; \quad (A \cup C) \cap (B \cup C); \quad (A \cup B) \cap C; \quad (A \cap C) \cup (B \cap C);$$
$$\mathcal{C}(A); \quad \mathcal{C}(B); \quad \mathcal{C}(A \cap B); \quad \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}B; \quad \mathcal{C}(A \cup B); \quad \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B).$$

**Esercizio 1.103.** Si dimostri che sussistono le seguenti proprietà:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
(proprietà *associative*);

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C); \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
(prop. *distributive*):

$$\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B); \quad \mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)$$
(formule di *De Morgan*).

[Si può procedere cosí: Si fissa un $x \in U$ e ci si chiede: «$x \in A$?», «$x \in B$?», «$x \in C$?». In base alle risposte, ci sono 8 casi possibili se gli insiemi coinvolti sono 3, 4 casi se gli insiemi sono solo 2. Per ciascuno di essi si controlla che $x$ appartiene al primo insieme se e solo se appartiene al secondo. Occupiamoci, per esempio, della prima formula di De Morgan.

| $A$ | $B$ | $A \cap B$ | $\mathcal{C}(A \cap B)$ | $\mathcal{C}(A)$ | $\mathcal{C}(b)$ | $\mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| sí | sí | sí | no | no | no | no |
| sí | no | no | sí | no | sí | sí |
| no | sí | no | sí | sí | no | sí |
| no | no | no | sí | sí | sí | sí |

Per concludere, basta confrontare la quarta e l'ultima colonna della tabella.]

**Esercizio 1.104.** Dati due insiemi $A$ e $B$ si chiama loro *differenza simmetrica* l'insieme $A\Delta B$ formato dagli elementi che appartengono a uno e uno solo degli insiemi $A$ e $B$. È dunque

$$A\Delta B := \{x : x \in A \ aut \ x \in B\} = (A \cap \mathcal{C}(B)) \cup (B \cap \mathcal{C}(A)).$$

Considerati gli insiemi di cui all'Esercizio 1.102, si descrivano gli insiemi:

$$A\Delta B; \quad A\Delta A; \quad A\Delta U; \quad A\Delta\emptyset; \quad (A\Delta B)\Delta C; \quad A\Delta(B\Delta C).$$

**Esercizio 1.105.** Si dimostri che sussistono le seguenti proprietà:

$$A\Delta B = B\Delta A; \quad A\Delta A = \emptyset; \quad A\Delta U = \mathcal{C}(A); \quad A\Delta\emptyset = A;$$
$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C).$$

[Si può procedere con la stessa tecnica suggerita per l'Esercizio 1.103.]

**Esercizio 1.106.** Si individuino graficamente i seguenti insiemi di punti del piano riferito a coordinate cartesiane:

$$\{(x,\, y) : x \leq 0\}\,; \quad \{(x,\, y) : (x \leq 1) \wedge (y \leq 1)\}\,;$$
$$\{(x,\, y) : |x| \leq 1\}\,; \quad \{(x,\, y) : x = y\}\,;$$
$$\{(x,\, y) : x \leq y\}\,; \quad \{(x,\, y) : |x| + |y| \leq 1\}\,; \quad \{(x,\, y) : |x - y| \leq 1\}\,;$$
$$\left\{(x,\, y) : x^2 + y^2 > 1\right\}; \quad \{(x,\, y) : (x > 1) \vee (y > 1)\}\,.$$

**Esercizio 1.107.** Posto $U := \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6\}$, si ricerchino i suoi sottoinsiemi $X$ soddisfacenti alle seguenti condizioni:

$$(a)\begin{cases} X \cup \{1,\, 2\} = \{1,\, 2,\, 6\} \\ X \cap \{1,\, 2\} \supseteq \{1\} \end{cases}; \qquad (b)\begin{cases} X \cap \{1,\, 2,\, 3,\, 4\} = \{3,\, 4\} \\ X \cap \{2,\, 4,\, 5,\, 6\} = \{2,\, 6\} \end{cases};$$
$$(c)\begin{cases} X \cap \{1,\, 2,\, 3\} \subseteq \{1,\, 2,\, 4\} \\ X \cap \{2,\, 5,\, 6\} \subseteq \{2,\, 6\} \\ X \cap \{2,\, 4,\, 6\} \subseteq \{1,\, 3,\, 5\} \end{cases}; \qquad (d)\begin{cases} X \cap \{3,\, 4,\, 5\} \supseteq \{4,\, 5\} \\ X \cap \{1,\, 2,\, 6\} \supseteq \{2,\, 6\} \end{cases}.$$

[Anche in questo caso, si può utilizzare una tabella analoga a quella vista in precedenza. Occupiamoci del problema $(a)$.

| Elemento | Prima condizione | Seconda condizione | Conclusione |
|---|---|---|---|
| 1 | - | sí | sí |
| 2 | - | - | - |
| 3 | no | - | no |
| 4 | no | - | no |
| 5 | no | - | no |
| 6 | sí | - | sí |

Il trattino indica che la cosa è indifferente. Ci sono dunque due soluzioni: $X_1 := \{1, 6\}$ e $X_2 := \{1, 2, 6\}$.]

**Esercizio 1.108.** ($a$) Si provi, mediante esempi, che da $A \cap B = A \cap C$ non segue $B = C$.

($b$) Si provi, mediante esempi, che da $A \cup B = A \cup C$ non segue $B = C$.

($c$) Si dimostri che, invece, da $(A \cap B = A \cap C) \wedge (A \cup B = A \cup C)$ segue $B = C$.

[($c$) Sia $x \in B$. Se è $x \in A$, è anche $x \in A \cap B = A \cap C$, da cui $x \in C$. Sia $x \notin A$; essendo comunque $x \in A \cup B = A \cup C$, si ottiene ancora $x \in C$. Analogamente si prova che è $C \subseteq B$.]

**Esercizio 1.109.** Date le seguenti coppie di funzioni $f$ e $g$ di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, si definiscano le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.

$$f(x) = 1 - 3x,\ g(x) = x - 2; \quad f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = \frac{1}{x^2 + 1};$$
$$f(x) = 3x,\ g(x) = \sin x; \quad f(x) = 3x + 2,\ g(x) = 2x - 4.$$

**Esercizio 1.110.** Data un'applicazione $f : E \to E'$, siano $A$, $B$ sottoinsiemi di $E$ e $A'$, $B'$ sottoinsiemi di $E'$. Si provi che:

($a$) Da $A \subseteq B$ segue $f(A) \subseteq f(B)$.
($b$) Da $A' \subseteq B'$ segue $f^{-1}(A') \subseteq f^{-1}(B')$.
($c$) Si ha $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
($d$) Si ha $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
($e$) Si ha $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.
($f$) Si ha $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$.
($g$) Si ha $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
($h$) Si ha $f(f^{-1}(A')) = A' \cap f(E)$.

[($a$) Sia $x' \in f(A)$; esiste $x \in A$ tale che $f(x) = x'$; essendo anche $x \in B$, si ottiene $f(x) = x' \in f(B)$.

($d$) Essendo $A \cap B \subseteq A$, la tesi segue dalla ($a$); in generale non sussiste l'uguaglianza; questa si ha se e solo se $f$ è iniettiva.]

**Esercizio 1.111.** Si esprima il termine $n$-imo $a_n$ delle seguenti successioni a valori razionali (ossia delle seguenti applicazioni $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{Q}$):

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ldots \qquad 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ldots$$

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{11},\ \frac{1}{14},\ldots \qquad -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ldots$$

$$0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ldots \qquad 0,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{7}{6},\ \frac{6}{7},\ldots$$

$$0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1,\ldots$$

[Per l'ultima successione, si può porre $a_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\frac{2\pi}{3} n)$.]

**Esercizio 1.112.** Per ciascuna delle seguenti relazioni binarie definite in $\mathbb{N}^+$, si dica se è riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva. Sia dunque $a \rho\, b$ se e solo se

($a$) $b = a + 1$;
($b$) $a$ è un divisore proprio di $b$;
($c$) $a$ e $b$ sono entrambi maggiori di 1;
($d$) $a$ e $b$ sono uguali o consecutivi;
($e$) nessuno dei due numeri è multiplo dell'altro;
($f$) $a$ e $b$ sono primi fra loro;
($g$) il massimo comun divisore di $a$ e $b$ è uguale a 3.

**Esercizio 1.113.** Si descriva l'insieme quoziente $E/\sim$ nel caso dell'equivalenza discreta e nel caso dell'equivalenza nulla.

**Esercizio 1.114.** Sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle applicazioni di un insieme $E$ in un insieme $E'$. Si provi che è un'equivalenza in $\mathcal{F}$ la relazione binaria definita da $f \sim g$ se e solo se è finito l'insieme $A := \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$.

**Esercizio 1.115.** Può accadere che in un insieme ordinato $(E, \vdash)$ il minimo coincida col massimo?

**Esercizio 1.116.** Sia $(\mathbb{N}^+, \lhd)$ l'insieme dei numeri naturali positivi ordinato per divisibilità. Si dica quali dei suoi seguenti sottoinsiemi sono totalmente ordinati:

$$\begin{array}{ll} \{2n : n = 1, 2, 3, \ldots\}\,; & \{n^2 : n = 1, 2, 3, \ldots\}\,; \\ \{2^n : n = 1, 2, 3, \ldots\}\,; & \{6n : n = 0, 1, 2, 3, \ldots\}\,; \\ \{n! : n = 1, 2, 3, \ldots\}\,; & \{2n : n \text{ è un numero primo}\}\,; \end{array}$$

**Esercizio 1.117.** In un insieme $E$ di persone, sia $a\rho\, b$ se e solo se $a$ è piú giovane di $b$. Si tratta di una relazione d'ordine?