
Università degli Studi di Trieste - Facoltà d'Ingegneria
Corsi di Studi in Ingegneria Industriale e in Ingegneria Navale
Programma del corso di Analisi Matematica I (9 CFU) [008IN]
A.a. 2011-2012
Prof. Pierpaolo Omari

L'insieme \mathbb{R} dei numeri reali. Proprietà algebriche dei numeri reali: \mathbb{R} è un corpo commutativo. Proprietà d'ordine dei numeri reali: \mathbb{R} è un corpo commutativo totalmente ordinato. L'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali. Principio d'induzione e applicazioni. Permutazioni. Il fattoriale. Combinazioni. Coefficienti binomiali. La formula di Newton per lo sviluppo del binomio. L'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi relativi. L'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali. La retta reale. Insufficienza dei numeri razionali. L'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni razionali (con dim.). Classi separate e classi contigue. Proprietà di continuità (di Dedekind) dell'insieme dei numeri reali: \mathbb{R} è un corpo commutativo totalmente ordinato e completo. \mathbb{Q} non è completo. Limitazioni inferiori e superiori. Massimo e minimo. Estremo superiore e inferiore. Teorema di esistenza dell'estremo superiore (con dim.). Proprietà caratteristiche dell'estremo superiore e inferiore. I simboli $+\infty$ e $-\infty$. Gli intervalli in \mathbb{R} . Valore assoluto e sue proprietà (con dim.). Proprietà di Archimede (con dim.). Approssimazione dei numeri reali mediante i numeri razionali (con dim.). Densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} (con dim.). Densità di delle frazioni decimali in \mathbb{R} . Rappresentazione in base dieci dei numeri naturali, razionali e reali. Studio dell'equazione $x^n = a$ con $n \in \mathbb{N}^+$ e $a \in \mathbb{R}$. La radice n -esima in \mathbb{R} .

L'insieme \mathbb{C} dei numeri complessi. Definizione di numero complesso. Forma algebrica (o di Eulero). L'unità immaginaria. Esistenza del reciproco di un numero complesso (con dim.). \mathbb{C} è un corpo commutativo. Piano di Gauss. Teorema fondamentale dell'algebra. Modulo di un numero complesso e relative proprietà. Coniugio in \mathbb{C} e relative proprietà. Forma trigonometrica (o polare) di un numero complesso. Argomento di un numero complesso. Formule di de Moivre. Studio dell'equazione $z^n = w$ con $n \in \mathbb{N}^+$ e $w \in \mathbb{C}$.

Funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} . Definizione di funzione. Funzioni iniettive, suriettive, biettive. Funzione inversa. Restrizione e prolungamento. Composizione di funzioni. Somma, prodotto, combinazione lineare di funzioni. Reciproca di una funzione. Massimo e minimo di due funzioni. Valore assoluto, parte positiva e parte negativa di una funzione. Funzioni pari, dispari, periodiche. Funzioni monotone. Potenza con esponente naturale, intero, razionale e reale. Proprietà formali. Funzioni elementari. Funzioni razionali. Polinomi. Principio d'identità dei polinomi. Grado di un polinomio. Radici di un polinomio. Fattorizzazione di un polinomio avente coefficienti reali in fattori di primo e secondo grado. La funzione radice n -esima. Le inverse delle funzioni circolari. La funzione esponenziale e relative proprietà (algebriche, positività, monotonia, suriettività) (con dim.). Grafici. Definizione del numero di Nepero (con dim.). La funzione logaritmo e relative proprietà (algebriche e cambiamento di base) (con dim.). Grafici. La funzione potenza e relative proprietà (algebriche e monotonia). Grafici. Le funzioni iperboliche. Successioni. Successioni definite per ricorrenza e applicazioni. Esempi di sistemi dinamici discreti.

Limiti di funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} . Studio del comportamento asintotico di una successione di numeri reali. Definizione di limite finito e infinito di una successione. Unicità del limite di una successione. Intorni e loro proprietà. Punti di accumulazione, punti isolati, punti interni e punti di frontiera. Chiusura, interno e frontiera di un insieme. Insiemi aperti, chiusi e limitati. Teorema di Bolzano-Weierstrass. Studio del comportamento locale di una funzione. Definizione generale di limite per una funzione. Esame dei casi particolari. Teorema di unicità del limite (con dim.). Limite della restrizione. Non esistenza del limite. Limite sinistro e destro. Limite della funzione composta (con dim.). Limite della somma e del prodotto (con dim.). Permanenza del segno (con dim.) e limitatezza locale (nel caso del limite). Limite della reciproca (con dim.). Teorema del confronto (o dei due carabinieri) (con dim.). Limite di $\frac{\sin x}{x}$ per x tendente a 0 (con dim.) e conseguenze. Limiti di funzioni razionali per x tendente all'infinito. Teorema sul limite delle funzioni monotone (con dim.) e applicazioni. Limite di $(1 + \frac{1}{x})^x$ per x tendente all'infinito (con dim.). Limiti di $\frac{a^x}{|x|^p}$ e $x^p \log_a x$ agli estremi dei rispettivi domini (con dim.). Limite di $\frac{a^x-1}{x}$ e $\frac{\log_a(1+x)}{x}$ per x tendente a 0 (con dim.). Limite di $\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$ per x tendente a 0 (con dim.).

Funzioni continue da \mathbb{R} in \mathbb{R} . Funzioni continue in un punto e su un insieme. Continuità di 1, x , $|x|$, \sqrt{x} , $\sin x$, $\cos x$, a^x (con dim.). Continuità della restrizione e della composta. Permanenza del segno e limitatezza locale. Continuità della somma, del prodotto, della combinazione lineare, della reciproca e del quoziente. Continuità dell'inversa (con dim.). Continuità di $\sqrt[n]{x}$, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$ (con dim.). Estremi assoluti e zeri di funzioni. Teorema di Weierstrass (con dim.). Teorema di Bolzano (di esistenza degli zeri) (con dim.). Il metodo di bisezione e applicazioni numeriche. Teorema di connessione (con dim.).

Calcolo differenziale per funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} . Motivazioni. Rapporto incrementale e derivata. Derivata sinistra e destra. Derivabilità e funzione derivata. Derivabilità e continuità (con dim.). Derivata infinita. Esempio di una funzione continua non derivabile in alcun punto. Approssimante lineare. Relazioni tra esistenza dell'approssimante lineare e la derivabilità (con dim.). Retta tangente. Differenziale. Applicazioni all'approssimazione numerica. Regole algebriche di derivazione: somma, prodotto, reciproca, quoziente (con dim.). Derivazione della funzione composta (con dim.). Derivazione della funzione inversa. Derivate delle principali funzioni elementari (con dim.). Derivate successive. Gli spazi $C^n(I)$, con $n \in \mathbb{N}$, e $C^\infty(I)$. L'applicazione di derivazione. Proprietà del primo ordine: crescita e decrescenza (locali e globali) e punti di estremo relativo. Punti critici. Teorema di Fermat (con dim.). Teorema di Rolle, di Cauchy e di Lagrange (con dim.) e loro interpretazione geometrica. Conseguenze del teorema di Lagrange: funzioni con derivata nulla (o positiva, o negativa) su un intervallo (con dim.). Applicazioni allo studio di funzioni: esistenza di punti di massimo e di minimo attraverso lo studio della derivata (con dim.). Infiniti e infinitesimi. Studio di situazioni (forme di indecisione) in cui i teoremi algebrici sui limiti non si applicano. Regola di de l'Hospital (idea della dim.). Asintoti.

Confronto locale di funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} . Infiniti equivalenti e ordini di infinito. Confronto fra ordini di infinito. Ordine di infinito della somma e del prodotto. Ordini di infinito reali, soprareali, sottoreali e infrareali. Infinitesimi equivalenti e ordini di infinitesimo. Confronto fra ordini di infinitesimo. Ordini di infinitesimo reali, soprareali, sottoreali e infrareali.

Formula di Taylor per funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} e applicazioni. Approssimazione locale e globale di una funzione mediante polinomi. Lemma di Peano (con dim.) e sue applicazioni al calcolo

dell'ordine di infinitesimo. Polinomio approssimante di ordine n . Teorema di Taylor (con dim. dell'esistenza del polinomio approssimante). La formula di Taylor con il resto di Peano e con il resto di Lagrange. Maggiorazione dell'errore e applicazioni all'approssimazione globale di una funzione. Sviluppi di Taylor-Maclaurin di e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\log x$, $(1+x)^\alpha$. Proprietà del secondo ordine: convessità, concavità e punti di flesso. Condizioni necessarie e sufficienti per la convessità e la concavità. Condizioni sulla derivata seconda sufficienti per la convessità e la concavità. Test della derivata seconda per l'esistenza di un punto di estremo relativo (con dim.). Condizione sulla derivata seconda necessaria per esistenza di un punto di flesso. Condizione sulla derivata seconda e terza sufficienti per esistenza di un punto di flesso (con dim.). Esistenza di punti di flesso attraverso lo studio della derivata seconda.

Primitive di funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} . Funzioni primitivabili e primitive. Caratterizzazione delle primitive di una funzione definita su un intervallo (con dim.). Integrale indefinito. Funzioni non integrabili elementarmente. Regole di primitivazione: linearità, parti, sostituzione diretta e inversa. Primitivazione delle funzioni razionali: metodo di decomposizione di Hermite.

Teoria dell'integrazione per funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} . Motivazioni. Decomposizioni di un intervallo. Somme inferiori e superiori e relative proprietà. Integrale di Riemann di una funzione limitata su un intervallo chiuso e limitato. Interpretazione geometrica dell'integrale. Esempio di una funzione non integrabile secondo Riemann. Integrabilità delle funzioni continue. Integrabilità delle funzioni limitate aventi un numero finito di punti di discontinuità. Integrabilità delle funzioni monotone (con dim.). Proprietà dell'integrale: integrabilità della combinazione lineare e linearità, monotonia (con dim.), integrabilità del valore assoluto, integrabilità del prodotto, teorema della media integrale (con dim.), additività rispetto al dominio, integrabilità della restrizione. Funzioni localmente integrabili. Integrale orientato. Regola di Chasles (con dim.). Teorema del valore assoluto per l'integrale orientato. Funzione integrale. Continuità della funzione integrale (con dim.). Teorema fondamentale del calcolo (con dim.). Derivazione di funzioni definite da integrali (con dim.). Esistenza di una primitiva di una funzione continua. Teorema di Torricelli (con dim.). Regole di integrazione definita: parti e sostituzione (con dim.). Integrazione di funzioni con particolari simmetrie: pari, dispari, periodiche.

Integrale in senso generalizzato per funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} . Motivazioni. Integrale in senso generalizzato. Integrazione in senso generalizzato delle funzioni campione. Criterio del confronto (con dim.). Funzioni assolutamente integrabili e semplicemente integrabili in senso generalizzato. Esempio di una funzione semplicemente integrabile in senso generalizzato. Relazioni tra l'assoluta integrabilità e l'integrabilità in senso generalizzato. Criterio dell'ordine di infinitesimo (con dim.). Criterio dell'ordine di infinito.

BIBLIOGRAFIA

- S. Terracini et al., *Analisi matematica*, vol. 1, Apogeo, Milano, 2008.
- G.C. Barozzi, G. Dore, E. Obrecht, *Elementi di Analisi Matematica*, vol. 1, Zanichelli, Bologna, 2009.
- G. Prodi, *Analisi matematica*, Boringhieri, Torino, 1970.
- P. Omari, M. Trombetta, *Temi svolti di analisi matematica*, E.G. Books, Trieste, 2005.

Trieste, 23.12.2011