Università degli Studi di Trieste - Facoltà d'Ingegneria
Corsi di Studi in Ingegneria Industriale [IN03] e Navale [IN04]

Programma del corso di Analisi Matematica I (12 CFU)
A.a. 2010-2011
Prof. Pierpaolo Omari

I semestre

Elementi di logica formale. Proposizioni. Operazioni logiche: negazione, congiunzione, disgiunzione, implicazione, doppia implicazione. Tavole di verità. Proprietà delle operazioni logiche. Implicazione diretta, inversa, contraria, contronominale. Tautologie e contraddizioni. Predicati. Paradosso di Russell. Quantificatori universale ed esistenziale. Regole di negazione. Teoremi e controesempi. Dimostrazione per assurdo. L'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni razionali (con dim.).

Elementi di teoria degli insiemi. Concetto di insieme. Elementi e appartenenza. Formazione di un insieme: principio di estensione e di astrazione. Inclusione. Insieme delle parti. Famiglie di insiemi. Operazioni fra insiemi: intersezione, unione, differenza, complementare e relative proprietà. Applicazioni fra insiemi e loro proprietà: suriezioni, iniezioni, biiezioni; immagine e controimmagine; applicazione identica; restrizioni e prolungamenti; composizione; inversione. Insieme prodotto. Relazioni binarie. Grafico di una relazione e di un'applicazione. Relazioni di equivalenza. Classi di equivalenza e insieme quoziente. Definizione per astrazione con esempi. Relazioni d'ordine in senso debole e in senso stretto con esempi. Limitazioni superiori e inferiori. Insiemi limitati. Massimo e minimo. Estremo superiore e inferiore. Insiemi equipotenti e cardinalità. Insiemi finiti e infiniti. Confronto fra cardinalità. Insiemi numerabili. $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono numerabili (con dim.). $\mathbb{R}$ non è numerabile (con dim.). Cardinalità dell'insieme delle parti.

Elementi di calcolo combinatorio. Permutazioni. Il fattoriale. Disposizioni. Combinazioni. Coefficienti binomiali e loro proprietà. La formula di Newton per lo sviluppo del binomio (con dim.).

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Proprietà algebriche dei numeri reali: $\mathbb{R}$ è un corpo commutativo. Proprietà d'ordine dei numeri reali: $\mathbb{R}$ è un corpo commutativo totalmente ordinato. L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi. L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. La retta reale. Insufficienza dei numeri razionali. Classi separate e classi contigue. Proprietà di continuità (di Dedekind) dell'insieme dei numeri reali: $\mathbb{R}$ è un corpo commutativo totalmente ordinato e completo. $\mathbb{Q}$ non è completo (con dim.). Estremo superiore e inferiore. Teorema di esistenza dell'estremo superiore (con dim.). Proprietà caratteristiche dell'estremo superiore e inferiore. Caratterizzazioine delle classi contigue con gli estremi superiore e inferiore. I simboli $+\infty$ e $-\infty$. Gli intervalli in $\mathbb{R}$ e proprietà di convessità. Valore assoluto e sue proprietà (con dim.). Proprietà di Archimede (con dim.). Principio del massimo in $\mathbb{N}$ (con dim.). Principio del minimo in $\mathbb{N}$ e principio di induzione. Approssimazione dei numeri reali mediante i numeri razionali (con dim.). Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ (con dim.). Densità di delle frazioni decimali in $\mathbb{R}$. Rappresentazione in base dieci dei numeri naturali, razionali e reali. Un modello di $\mathbb{R}$: gli allineamenti decimali. Studio dell'equazione $x^n = a$ con $n \in \mathbb{N}^+$ e $a \in \mathbb{R}$ (con dim.). La radice $n-$esima in $\mathbb{R}$.

L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Motivazioni. Definizione di numero complesso. Forma algebrica (o di Eulero). L'unità immaginaria. $\mathbb{C}$ è un corpo commutativo. Esistenza del reciproco di un numero complesso (con dim.). Piano di Gauss. Teorema fondamentale dell'algebra. Modulo di un numero complesso e relative proprietà. Coniugio in $\mathbb{C}$ e relative proprietà. Forma trigonometrica (o polare) di un numero complesso. Argomento di un numero complesso. Formule di de Moivre. Risoluzione dell'equazione $z^n = w$ con $n \in \mathbb{N}^+$ e $w \in \mathbb{C}$.

Funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Somma, prodotto, combinazione lineare di funzioni. Reciproca di una funzione. Massimo e minimo di due funzioni. Valore assoluto, parte positiva e parte negativa di una funzione. Funzioni pari, dispari, periodiche. Funzioni monotone. Potenza con esponente naturale. Potenza con esponente intero. Potenza con esponente razionale (con dim.). Potenza con esponente reale (con dim.). Proprietà formali. Funzioni elementari. Funzioni razionali. Polinomi. Principio d'identità dei polinomi. Grado di un polinomio. Radici di un polinomio. Fattorizzazione di un polinomio avente coefficienti reali in fattori di primo e secondo grado. La funzione radice $n-$esima. Le funzioni circolari e relative proprietà. Le inverse delle funzioni circolari. La funzione esponenziale e relative proprietà (algebriche, positività, monotonia, suriettività) (con dim.). Grafici. Definizione del numero di Nepero (con dim.). La funzione logaritmo e relative proprietà (algebriche e cambiamento di base) (con dim.). Grafici. La funzione potenza e relative proprietà (algebriche e monotonia). Grafici. Le funzioni iperboliche e le loro inverse. Successioni e sottosuccessioni. Successioni definite per ricorrenza. Modelli matematici discreti: esempi tratti dalla dinamica delle popolazioni.

Elementi di topologia della retta e del piano complesso. Distanza euclidea in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$. Proprietà della distanza (con dim.). Nozione di spazio metrico. Sfere aperte e chiuse. Intorni di un punto. Proprietà degli intorni. Intorni di $+\infty$ e di $-\infty$ in $\mathbb{R}$. Punti di accumulazione. Punti isolati. Teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$. (con dim. in $\mathbb{R}$). Chiusura di un insieme e insieme chiuso. Punti interni. Interno di un insieme e insieme aperto. Proprietà degli aperti e dei chiusi. Punti di frontiera. Frontiera di un insieme. Diametro di un insieme e insiemi limitati.

Limiti di successioni e funzioni. Studio del comportamento asintotico di una successione di numeri reali. Definizione di limite finito e infinito di una successione. Unicità del limite di una successione (con dim.). Limiti di sottosuccessioni. Limite di una successione in $\mathbb{C}$ e sua caratterizzazione con le parti reali e immaginarie. Proprietà delle successioni limitate (teorema di Bolzano-Weierstrass per successioni) (con dim.). Studio del comportamento locale di una funzione. Definizione generale di limite per una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$. Esame dei casi particolari. Teorema di unicità del limite (con dim.). Limite della restrizione. Non esistenza del limite. Limite sinistro e destro ed esistenza del limite. Limite della funzione composta (con dim.). Limite della somma e del prodotto (con dim.). Permanenza del segno (con dim.) e limitatezza locale (nel caso del limite) (con dim.). Limite della reciproca (con dim.). Teorema del confronto (o dei due carabinieri) (con dim.). Teorema sul limite delle funzioni monotone (con dim.). Proprietà delle funzioni monotone definite su intervalli. Teorema sul limite delle successioni monotone. Limite di $\frac{\sin x}{x}$ per x tendente a 0 (con dim.) e conseguenze. Limiti di funzioni razionali per x tendente all'infinito. Limite di $(1+\frac{1}{x})^x$ per x tendente a $\pm\infty$ (con dim.). Limiti di $\frac{a^x}{|x|^p}$ e $x^p \log_a x$ agli estremi dei rispettivi domini (con dim.). Limite di $\frac{a^x-1}{x}$ e $\frac{\log_a(1+x)}{x}$ per x tendente a 0 (con dim.). Limite di $\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$ per x tendente a 0. Conseguenze e applicazioni. Successioni di Cauchy. Proprietà delle successioni limitate (teorema di Bolzano-Weierstrass per successioni) (con dim.). Criterio di Cauchy per le successioni (con dim.). Criterio di Cauchy per le funzioni. Studio delle successioni definite per ricorrenza.

Funzioni continue. Funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ continue in un punto e su un insieme. Continuità di 1, x, $|x|$, $\sqrt{x}$, $\sin x$, $\cos x$, a^x (con dim.). Continuità della restrizione e della composta. Permanenza del segno e limitatezza locale (con dim.). Continuità della somma, del prodotto, della combinazione lineare, della reciproca e del quoziente (con dim.). Lo spazio $C^0(E)$. Continuità dei polinomi, delle funzioni razionali, di $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sinh x$, $\cosh x$. Continuità delle funzioni monotone che hanno come immagine un intervallo (con dim.). Continuità dell'inversa di una funzione definita su un intervallo (con dim.). Continuità di $\sqrt[n]{x}$, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcsinh} x$, $\operatorname{arccosh} x$. Estremi assoluti e zeri di funzioni. Successioni minimizzanti e massimizzanti e loro esistenza. Insiemi (sequenzialmente) compatti in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$: un insieme è compatto se e solo se è chiuso e limitato (con dim.). Teorema di Weierstrass sull'esistenza degli estremi (con dim.). Teorema di compattezza (con dim.). Insiemi connessi in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Teorema di Bolzano sull'esistenza degli zeri in $\mathbb{R}$ (con dim.). Il metodo di bisezione e applicazioni numeriche. Risoluzione di equazioni. Teorema di connessione (con dim.). Funzioni uniformemente continue. Funzioni Lipschitziane. Teorema di Heine (con dim.).

II semestre

Calcolo differenziale per funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Motivazioni. Rapporto incrementale e derivata. Interpolante lineare e retta secante. Derivata sinistra e destra. Derivabilità e funzione derivata. Derivabilità e continuità (con dim.). Derivata infinita. Due funzioni patologiche: la funzione di Dirichlet e la funzione di Weierstrass. Approssimante lineare. Relazioni tra l'esistenza dell'approssimante lineare e la derivabilità (con dim.). Retta tangente. Differenziale. Applicazioni all'approssimazione numerica. Regole algebriche di derivazione: somma, prodotto, reciproca, quoziente (con dim.). Derivazione della funzione composta (con dim.). Derivazione della funzione inversa (on dim.). Derivate delle principali funzioni elementari (con dim.). Derivate successive. Gli spazi vettoriali $C^n(I)$, con $n \in \mathbb{N}$, e $C^\infty(I)$ e l'applicazione lineare di derivazione. Proprietà del primo ordine: crescenza e decrescenza e punti di estremo relativo. Relazione tra crescenza in un punto e segno della derivata (con dim.). Punti critici. Teorema di Fermat (con dim.). Teorema di Rolle (con dim.), di Cauchy (con dim.) e di Lagrange (con dim.) e loro interpretazione geometrica. Conseguenze del teorema di Lagrange: funzioni con derivata nulla (o positiva, o negativa) su un intervallo (con dim.). Applicazioni allo studio di funzioni: esistenza di punti di massimo e di minimo attraverso lo studio dello derivata prima (con dim.). Infiniti e infinitesimi. Studio di situazioni (forme di indecisione) in cui i teoremi algebrici sui limiti non si applicano. Regola di de l'Hospital (con dim. nel caso $\frac{0}{0}$). Teorema sul limite della derivata (con dim.). Funzioni asintotiche e asintoti.

Confronto locale di funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Infiniti equivalenti e ordini di infinito. Confronto fra ordini di infinito. Ordine di infinito della somma e del prodotto. Ordini di infinito reali, soprareali, sottoreali e infrareali. Infinitesimi equivalenti e ordini di infinitesimo. Confronto fra ordini di infinitesimo. Ordini di infinitesimo reali, soprareali, sottoreali e infrareali. La notazione "o" di Landau.

Formula di Taylor per funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e applicazioni. Approssimazione locale e globale di una funzione mediante polinomi. Lemma di Peano (con dim.) e sue applicazioni al calcolo dell'ordine di infinitesimo. Polinomio approssimante di ordine n. Teorema di Taylor (con dim.). Lemma di Lagrange (con dim.). La formula di Taylor con il resto di Peano e con il resto di Lagrange. Maggiorazione dell'errore e applicazioni all'approssimazione globale di una funzione. Sviluppi di Taylor-Maclaurin di e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$. Proprietà del secondo ordine: convessità, concavità e punti di flesso. Convessità e concavità e monotonia della derivata. Convessità e concavità: relazioni con l'approssimante lineare. Condizioni sulla derivata seconda sufficienti per la convessità e la concavità (con dim.). Test della derivata seconda per l'esistenza di un punto di estremo relativo (con dim.). Condizione sulla derivata seconda necessaria per esistenza di un punto di flesso (con dim.). Condizione sulla derivata terza sufficiente per esistenza di un punto di flesso (con dim.). Esistenza di punti di flesso attraverso lo studio dello derivata seconda (con dim.). Il metodo di Newton per la risoluzione numerica di un'equazione e sua convergenza (con dim. facoltativa).

Primitive di funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Funzioni primitivabili e primitive. Caratterizzazione delle primitive di una funzione definita su un intervallo (con dim.). Integrale indefinito. Esempi di funzioni prive di primitiva elementare. Regole di primitivazione: linearità, parti, sostituzione diretta e inversa. Primitivazione delle funzioni razionali: metodo di decomposizione di Hermite. Alcune sostituzioni razionalizzanti.

Teoria dell'integrazione per funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Motivazioni. Decomposizioni di un intervallo. Ordinamento per finezza. Somme integrali inferiori e superiori e relative proprietà (con dim.). Integrale di Riemann-Darboux di una funzione limitata su un intervallo chiuso e limitato. Interpretazione geometrica dell'integrale. Approssimazione numerica dell'integrale: metodo dei rettangoli, metodo delle tangenti e metodo dei trapezi. Esempio di una funzione non integrabile secondo Riemann. Integrabilità delle funzioni continue (con dim.). Integrabilità delle funzioni limitate aventi un numero finito di punti di discontinuità. Integrabilità delle funzioni monotone (con dim.). Proprietà dell'integrale: integrabilità della combinazione lineare e linearità (con dim.), monotonia (con dim.), integrabilità del valore assoluto (con dim.), integrabilità del prodotto (con dim.), teorema della media integrale (con dim.), additività rispetto al dominio (con dim.), integrabilità della restrizione (con dim.). Funzioni localmente integrabili. Integrale orientato. Regola di Chasles (con dim.). Teorema del valore assoluto per l'integrale orientato (con dim.). Funzione integrale. Continuità della funzione integrale (con dim.). Teorema fondamentale del calcolo (con dim.). Derivazione di funzioni definite da integrali (con dim.). Esistenza di una primitiva di una funzione continua. Teorema di Torricelli (con dim.). Regole di integrazione definita: parti e sostituzione (con dim.). Integrazione di funzioni con particolari simmetrie: pari, dispari, periodiche. Relazioni fra continuità, primitivabilità, integrabilità.

Integrale in senso generalizzato per funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Motivazioni. Integrale in senso generalizzato. Integrazione in senso generalizzato delle funzioni campione. Criterio del confronto (con dim.). Funzioni assolutamente integrabili e semplicemente integrabili in senso generalizzato. Esempio di una funzione integrabile in senso generalizzato, ma non assolutamente integrabile in senso generalizzato (con dim.). Relazioni tra l'assoluta integrabilità e l'integrabilità in senso generalizzato (con dim.). Criterio dell'ordine di infinitesimo (con dim.). Criterio dell'ordine di infinito.

Serie numeriche. Motivazioni ed esempi. Serie di numeri reali. Termine generale e somme parziali (ridotte). Serie convergenti, divergenti, indeterminate. La serie geometrica e suo carattere (con dim.). La serie armonica e suo carattere (con dim.). La serie di Mengoli e suo carattere (con dim.). Condizione necessaria per la convergenza: il termine generale dev'essere infinitesimo (con dim.). Funzione a gradino associata a una serie. Relazioni tra serie e integrali generalizzati (con dim.). Stime della somma e stime d'errore. Serie a termini positivi. Aut-aut per le serie a termini positivi (con dim.). Criterio del confronto (con dim.). Criterio dell'ordine d'infinitesimo (con dim.). Serie armonica generalizzata e suo carattere (con dim.). Criterio del rapporto (con dim.). Criterio del rapporto con il limite (con dim.). Criterio della radice (con dim.). Criterio della radice con il limite. Serie con i termini di segno misto. Serie assolutamente e semplicemente convergenti. La convergenza assoluta implica la convergenza (con dim.). Serie con i termini di segno alternato. Criterio di Leibniz (con dim.). Operazioni con le serie: somma e prodotto per una costante. Proprietà associativa per le serie. Associatività delle serie non indeterminate. Proprietà commutativa delle serie. Permutabilità delle serie convergenti a termini positivi Permutabilità delle serie assolutamente convergenti. Serie di numeri complessi: convergenza e indeterminatezza. Caratterizzazione della convergenza. Assoluta convergenza e convergenza.

BIBLIOGRAFIA

• G. Prodi, Analisi matematica, Boringhieri, Torino, 1970.
• S. Terracini et al., Analisi matematica, vol. 1, Apogeo, Milano, 2008.
• G.C. Barozzi, G. Dore, E. Obrecht, Elementi di Analisi Matematica, vol. 1, Zanichelli, Bologna, 2009.
• P. Omari, M. Trombetta, Temi svolti di analisi matematica, E.G. Books, Trieste, 2005.

Trieste, 25.5.2011