Esercizi di Analisi Matematica I

1. Tradurre in linguaggio "formalizzato", cioè usando il simbolismo della logica le seguenti proposizioni. Poi negare le proposizioni senza passare per il linguaggio formalizzato. Negare le traduzioni nel linguaggio formalizzato e tradurre in linguaggio corrente le negazioni. Infine confrontare i risultati.
   a) alcune delle proposizioni sotto elencate sono vere, altre sono false;
   b) nessuno supera l'esame di analisi se non conosce la definizione di limite;
   c) coloro che conoscono la definizione di limite superano l'esame di analisi;
   d) chiunque si sia preparato con cura supera l'esame di analisi;
   e) c'è un esame che tutti gli studenti superano;
   f) ci sono studenti che superano tutti gli esami;
   g) ogni studente che ha superato l'esame o ha studiato o è molto fortunato.

2. Dimostrare, essendo $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$,
   a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$
   b) $A = B \Leftrightarrow (\exists C)(A \cap C = B \cap C \wedge A \cup C = B \cup C)$
   c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
   d) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$
   e) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
   f) $(A \setminus B) \cup C = ((A \cup C) \setminus B) \cup (B \cap C)$
   g) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, essendo $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$,
   h) $(A \Delta B) \cap A = A \setminus (A \cap B)$

3. Se $A = \{a, \{a\}, b\}$, trovare $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(A) \cap A$, $\mathcal{P}(A) \cup A$ e $\mathcal{P}(A) \setminus A$.

4. Provare che se $f : E \to E'$ è biettiva, allora per ogni $x' \in E'$, $f^{-1}(\{x'\}) = \{f^{-1}(x')\}$.

5. Provare che se $f: E \to E'$ e $g: E' \to E''$, allora

a) $g \circ f$ iniettiva $\Rightarrow$ f iniettiva

b) $g \circ f$ suriettiva $\Rightarrow$ g suriettiva

c) $g \circ f$ iniettiva e f suriettiva $\Rightarrow$ g iniettiva

d) $g \circ f$ suriettiva e g iniettiva $\Rightarrow$ f suriettiva

6. Mostrare che $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ e $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ (e in generale non vale l'uguaglianza).

7. Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$.

Trovare $f \circ f$.

8. Sia $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, con $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, definita da $f(x) = \frac{1}{x}$. Si provi che è biettiva e si trovi l'inversa.

9. Si provi che la relazione binaria in $\mathbb{R}$ definita da $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 = y^2$ è un'equivalenza. Si descriva il grafico e l'insieme quoziente.

10. Descrivere il grafico delle seguenti relazioni binarie in $\mathbb{R}$:

a) $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (x + y = 2)$ e $(0 \leq x \leq y)$

b) $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (x^2 + y^2 = 4)$ e $(xy > 0)$

c) $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

Ci sono fra questi dei grafici di funzione?

11. Si dica di quali proprietà godono le seguenti relazioni binarie in $\mathbb{R}$:

a) $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$

b) $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^3 \leq y^3$

c) $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x/y \in \mathbb{Q}$

Ci sono fra queste delle relazioni di equivalenza o delle relazioni d'ordine?