Pierpaolo Omari
Maurizio Trombetta

TEMI SVOLTI DI ANALISI MATEMATICA I

Trieste – Udine
giugno 2005

Prefazione

Questo volume raccoglie i temi assegnati alle prove d'esame dei corsi di Analisi matematica I per la laurea triennale in Ingegneria, presso l'Università degli Studi di Trieste, durante gli anni accademici 2001-02, 2002-03, 2003-04.

Gli esercizi si riferiscono ai seguenti argomenti: numeri reali e complessi; funzioni elementari; limiti, continuità, derivate e integrali, eventualmente generalizzati, di funzioni di una variabile. I quesiti, di varia natura e complessità, sono 254 di cui 158 completamente risolti. Gli esercizi non svolti riguardano solo alcune prove intermedie e sono comunque piccole variazioni di problemi già discussi.

Si raccomanda allo studente che utilizzerà questo testo di curare, in primo luogo, la propria preparazione teorica, poi di cimentarsi autonomamente nella risoluzione degli esercizi e in fine, soltanto dopo aver elaborato una propria risposta di leggere lo svolgimento qui proposto.

Ringraziamo anticipatamente chiunque vorrà gentilmente segnalarci quegli errori, che sicuramente sono presenti nel testo e che finora ci sono sfuggiti.

M.T. - P.O., Udine - Trieste, giugno 2005

PIERPAOLO OMARI
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Trieste
Email: omari@units.it

MAURIZIO TROMBETTA
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Udine
Email: mtrombet@dimi.uniud.it

Indice

1

Anno Accademico 2001 - 2002

1.1 Prove Intermedie

1.1.1 6 ottobre 2001 — Tema A

■ **Esercizio 1.1.** *Si determinino tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che il numero complesso*

$$\frac{2i\,x + 1}{2x + i}$$

ha parte immaginaria nulla.

Risultato

$$-\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}$$

Svolgimento
Si ha che

$$\frac{2i\,x + 1}{2x + i} = \frac{2i\,x + 1}{2x + i} \cdot \frac{2x - i}{2x - i} = \frac{4x + i(4x^2 - 1)}{4x^2 + 1}$$

ha parte immaginaria nulla se e solo se

$$4x^2 = 1,$$

cioè

$$(x = -1/2) \vee (x = 1/2)\,.$$

■ **Esercizio 1.2.** *Si calcoli*

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot 999^k.$$

Risultato

$$10^{30}$$

Svolgimento
Usando la formula di Newton per lo sviluppo del binomio, si ottiene

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot 999^k = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot 999^k \cdot 1^{10-k} = (999+1)^{10} = 10^{30}.$$

■ **Esercizio 1.3.** *Si determinino gli estremi inferiore e superiore dell'insieme*

$$A = \left]1, \sqrt{3}\right[\cap \left[\sqrt{2}, 3\right],$$

specificando se sono rispettivamente minimo e massimo.

Risultato

$$\inf A = \sqrt{2} = \min A, \qquad \sup A = \sqrt{3} \quad (\max A \text{ non esiste})$$

Svolgimento
Poiché

$$A = \left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right[,$$

si ha

$$\inf A = \sqrt{2} \in A,$$
$$\sup A = \sqrt{3} \notin A.$$

1.1.2 6 ottobre 2001 — Tema B

■ **Esercizio 1.4.** *Si determinino tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che il numero complesso*

$$\frac{i\,x+2}{x+2i}$$

ha parte immaginaria nulla.

■ **Esercizio 1.5.** *Si calcoli*

$$\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} \cdot 99^k.$$

■ **Esercizio 1.6.** *Si determinino gli estremi inferiore e superiore dell'insieme*

$$A = \left]0, \sqrt{2}\right[\,\cap\, \left[1, \sqrt{3}\right],$$

specificando se sono rispettivamente minimo e massimo.

1.1.3 6 ottobre 2001 — Tema C

■ **Esercizio 1.7.** *Si determinino tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che il numero complesso*

$$\frac{3i\,x+1}{3x+i}$$

ha parte immaginaria nulla.

■ **Esercizio 1.8.** *Si calcoli*

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot 99^k.$$

■ **Esercizio 1.9.** *Si determinino gli estremi inferiore e superiore dell'insieme*

$$A = \left[0, \sqrt{2}\right] \,\cap\, \left]1, \sqrt{3}\right[,$$

specificando se sono rispettivamente minimo e massimo.

1.1.4 6 ottobre 2001 — Tema D

■ **Esercizio 1.10.** *Si determinino tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che il numero complesso*

$$\frac{i\,x+3}{x+3i}$$

ha parte immaginaria nulla.

■ **Esercizio 1.11.** *Si calcoli*

$$\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} \cdot 999^k.$$

■ **Esercizio 1.12.** *Si determinino gli estremi inferiore e superiore dell'insieme*

$$A = \left[1, \sqrt{3}\right] \cap \left]\sqrt{2}, 3\right[\ ,$$

specificando se sono rispettivamente minimo e massimo.

1.1.5 20 ottobre 2001 — Tema A

■ **Esercizio 1.13.** *Si dimostri, applicando la definizione di limite, che*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n+\pi}-\pi}{e^n+\pi} = e^\pi.$$

Svolgimento
Si deve dimostrare che

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \bar{n} \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > \bar{n} \Rightarrow \left| \frac{e^{n+\pi}-\pi}{e^n+\pi} - e^\pi \right| < \varepsilon \right).$$

Fissato $\varepsilon > 0$, si cerca $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ si abbia

$$\left| \frac{e^{n+\pi}-\pi}{e^n+\pi} - e^\pi \right| < \varepsilon.$$

Poiché

$$\left| \frac{e^{n+\pi}-\pi}{e^n+\pi} - e^\pi \right| = \frac{\pi(1+e^\pi)}{e^n+\pi} \le \frac{\pi(1+e^\pi)}{e^n},$$

basta prendere

$$\bar{n} > \log \frac{\pi(1+e^\pi)}{\varepsilon}.$$

■ **Esercizio 1.14.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = 4 \arcsin(1 - \log(x-1)).$$

▶ *Si determini il dominio di f.*

Si ha

$$\begin{cases} x-1>0 \\ -1 \le 1-\log(x-1) \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ -2 \le -\log(x-1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 1 \le x-1 \le e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 2 \le x \le e^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x \le e^2+1$$

e quindi

$$\operatorname{dom} f = [2,\, e^2+1].$$

▶ *Si provi che f è una funzione strettamente decrescente.*

Per ogni $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$, si ha

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \log(x_1-1) < \log(x_2-1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1-\log(x_1-1) > 1-\log(x_2-1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4\arcsin(1-\log(x_1-1)) > 4\arcsin(1-\log(x_2-1)).$$

▶ *Si determini l'insieme degli $y \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $f(x) = y$ ammette una soluzione $x \in \operatorname{dom} f$.*

Si ha

$$f(x) = y \Leftrightarrow \arcsin(1-\log(x-1)) = \frac{y}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\pi/2 \le y/4 \le \pi/2 \\ 1-\log(x-1) = \sin y/4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\pi \le y \le 2\pi \\ x = 1+\exp(1-\sin y/4). \end{cases}$$

e quindi

$$\operatorname{imm} f = [-2\pi,\, 2\pi].$$

1.1.6 20 ottobre 2001 – Tema B

■ **Esercizio 1.15.** *Si dimostri, applicando la definizione di limite, che*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^{n+e} - e}{\pi^n + e} = \pi^e.$$

■ **Esercizio 1.16.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin(1 - \log(x + 1)).$$

▶ *Si determini il dominio di* f.
▶ *Si provi che* f *è una funzione strettamente decrescente.*
▶ *Si determini l'insieme degli* $y \in \mathbb{R}$ *tali che l'equazione* $f(x) = y$ *ammette una soluzione* $x \in \operatorname{dom} f$.

1.1.7 20 ottobre 2001 – Tema C

■ **Esercizio 1.17.** *Si dimostri, applicando la definizione di limite, che*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^{n-e} - e}{\pi^n + e} = \pi^{-e}.$$

■ **Esercizio 1.18.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = 2 \arcsin(1 + \log(1 - x)).$$

▶ *Si determini il dominio di* f.
▶ *Si provi che* f *è una funzione strettamente decrescente.*
▶ *Si determini l'insieme degli* $y \in \mathbb{R}$ *tali che l'equazione* $f(x) = y$ *ammette una soluzione* $x \in \operatorname{dom} f$.

1.1.8 20 OTTOBRE 2001 – TEMA D

■ **Esercizio 1.19.** *Si dimostri, applicando la definizione di limite, che*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n-\pi}-\pi}{e^n+\pi} = e^{-\pi}.$$

■ **Esercizio 1.20.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\arcsin(1-\log(1-x)).$$

- ▶ *Si determini il dominio di f.*
- ▶ *Si provi che f è una funzione strettamente crescente.*
- ▶ *Si determini l'insieme degli $y \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $f(x) = y$ ammette una soluzione $x \in \operatorname{dom} f$.*

1.1.9 10 NOVEMBRE 2001 – TEMA A

■ **Esercizio 1.21.** *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\pi^{2x}-1}{3x}.$$

Risultato

$$\frac{2}{3}\log\pi$$

Svolgimento
Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\pi^{2x}-1}{3x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x\,\log\pi}-1}{2x\,\log\pi}\cdot\frac{2x\,\log\pi}{3x}\right) = \frac{2}{3}\log\pi.$$

■ **Esercizio 1.22.** *Si calcoli*

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \left(\cos\frac{1}{x} - 1\right).$$

Risultato

$$-\frac{1}{2}$$

Svolgimento
Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \left(\cos\frac{1}{x} - 1\right) = -\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos\left({}^1\!/_x\right)}{\left({}^1\!/_x\right)^2} =$$
$$= -\lim_{t\to 0^+} \frac{1-\cos t}{t^2} = -\frac{1}{2}.$$

■ **Esercizio 1.23.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 - 1, & \textit{se } x \leq 0, \\ e^{-1/x}, & \textit{se } x > 0, \end{cases}$$

dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$.

▶ *Si calcolino i seguenti limiti:*

$*$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $*$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = a^2 - 1$

$*$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ $*$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

▶ *Si determinino gli $a \in \mathbb{R}$ tali che f è continua in $x_0 = 0$.*

La funzione f è continua in $x_0 = 0$ se e solo se

$$0 = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = a^2 - 1,$$

cioè se e solo se

$$a^2 = 1,$$

ossia se e solo se

$$(a = -1) \vee (a = 1).$$

▶ *Si determinino gli $a \in \mathbb{R}$ tali che f è continua e non negativa su $\mathbb{R}$.*

La funzione f è continua su $\mathbb{R}$ se e solo se $a = -1$ o $a = 1$.
Se $a = -1$, allora $(x+1)^2 - 1 = x(x+2) < 0$ in $]-2, 0[$.
Se $a = 1$, allora

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2)\ [\geq 0], & \text{se } x \leq 0, \\ e^{-1/x}\ [> 0], & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

cioè f è non negativa su $\mathbb{R}$.
L'unico valore è dunque

$$a = 1.$$

1.1.10 10 novembre 2001 – Tema B

■ **Esercizio 1.24.** *Si calcoli*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_\pi (1 + \pi x)}{x}.$$

■ **Esercizio 1.25.** *Si calcoli*

$$\lim_{x \to +\infty} e^x \cdot \sin e^{-x}.$$

■ **Esercizio 1.26.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 - 1, & \text{se } x \leq 0, \\ e^{-1/x}, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$.

▶ *Si calcolino i seguenti limiti:*

$* \lim_{x \to -\infty} f(x) =$ $\qquad$ $* \lim_{x \to 0^-} f(x) =$

$* \lim_{x \to 0^+} f(x) =$ $\qquad$ $* \lim_{x \to +\infty} f(x) =$

▶ *Si determinino gli $a \in \mathbb{R}$ tali che f è continua in $x_0 = 0$.*

▶ *Si determinino gli $a \in \mathbb{R}$ tali che f è continua e non negativa su $\mathbb{R}$.*

1.1.11 10 novembre 2001 – Tema C

■ **Esercizio 1.27.** *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_3(1-2x)}{x}.$$

■ **Esercizio 1.28.** *Si calcoli*

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\cdot \sin\frac{\pi}{\sqrt{x}}.$$

■ **Esercizio 1.29.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & \text{se } x < 0, \\ (x-a)^2 - 1, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$.

▶ *Si calcolino i seguenti limiti:*

$* \lim_{x\to -\infty} f(x) =$ $\qquad$ $* \lim_{x\to 0^-} f(x) =$

$* \lim_{x\to 0^+} f(x) =$ $\qquad$ $* \lim_{x\to +\infty} f(x) =$

▶ *Si determinino gli* $a \in \mathbb{R}$ *tali che* f *è continua in* $x_0 = 0$.

▶ *Si determinino gli* $a \in \mathbb{R}$ *tali che* f *è continua e non negativa su* $\mathbb{R}$.

1.1.12 10 novembre 2001 – Tema D

■ **Esercizio 1.30.** *Si calcoli*

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x.$$

■ **Esercizio 1.31.** *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\sin^2 x}.$$

■ **Esercizio 1.32.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & \text{se } x < 0, \\ (x+a)^2 - 1, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$.

▶ *Si calcolino i seguenti limiti:*

$*\ \lim_{x\to -\infty} f(x) =$ $\qquad$ $*\ \lim_{x\to 0^-} f(x) =$

$*\ \lim_{x\to 0^+} f(x) =$ $\qquad$ $*\ \lim_{x\to +\infty} f(x) =$

▶ *Si determinino gli* $a \in \mathbb{R}$ *tali che* f *è continua in* $x_0 = 0$.

▶ *Si determinino gli* $a \in \mathbb{R}$ *tali che* f *è continua e non negativa su* $\mathbb{R}$.

1.1.13 17 NOVEMBRE 2001 — TEMA A

■ **Esercizio 1.33.** *La tabella seguente riporta i valori in alcuni punti delle funzioni* $f(x)$, $g(x)$ *e delle loro derivate* $f'(x)$, $g'(x)$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
-3	4	1	4	-1
-2	0	-3	5	-2
-1	-2	4	6	0
0	1	-1	3	-1
1	-2	-3	-1	-4
2	0	-3	2	1
3	-4	-6	-2	4

▶ *Si calcoli nel punto* $x_0 = 1$ *la derivata della funzione prodotto* $f(x) \cdot g(x)$.

Si ha
$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
e quindi
$$D(fg)(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = (-1)(-3) + (-2)(-4) = 11.$$

▶ *Si calcoli nel punto $x_0 = 0$ la derivata della funzione composta $f(g(x))$.*

Si ha
$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$
e quindi
$$D(f\circ g)(0) = f'(g(0))g'(0) = f'(-1)(-1) = 6\cdot(-1) = -6.$$

▶ *Si calcoli nel punto $x_0 = -1$ la derivata della funzione quoziente $\dfrac{g(x)}{f(x)}$.*

Si ha
$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(x))^2}$$
e quindi
$$D\left(\frac{g}{f}\right)(-1) = \frac{g'(-1)f(-1) - g(-1)f'(-1)}{(f(-1))^2} = \frac{0\cdot(-2) - 4\cdot 6}{(-2)^2} = -6.$$

■ **Esercizio 1.34.** *Si consideri la funzione*
$$f(x) = \frac{2x^2 + e^{-2x} - 2}{x}.$$

▶ *Si determini il dominio di f.*
$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

▶ *Si calcolino:*

$*\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad *\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

$*\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ $\qquad *\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

▶ *Si provi che la funzione $f(x)$ ammette almeno due zeri.*

Poiché f è continua su $]-\infty,0[$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, il teorema della permanenza del segno e il teorema di esistenza degli zeri assicurano l'esistenza di almeno un punto $x_1 \in\,]-\infty,0[$ tale che $f(x_1) = 0$. Analogamente si prova l'esistenza di almeno un punto $x_2 \in\,]0,+\infty[$ tale che $f(x_2) = 0$.

▶ *Si determinino gli asintoti di f.*

Poiché

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2,\qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0,$$

f ha un solo asintoto obliquo, a $+\infty$, avente equazione $y=2x$.
Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to0}f(x)=\infty,$$

f ha un solo asintoto verticale, avente equazione $x=0$.

▶ *Si calcoli $f'(x)$.*

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-e^{-2x}(2x+1)}{x^2}.$$

▶ *Si determini l'approssimante lineare $\bar{f}$ di f nel punto $x_0=1$.*

Poiché $\bar{f}(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, $f'(x_0)=4-3e^{-2}$ e $f(x_0)=e^{-2}$, si ha

$$\bar{f}(x)=(4-3e^{-2})(x-1)+e^{-2}.$$

1.1.14 17 novembre 2001 — Tema B

■ **Esercizio 1.35.** *La tabella seguente riporta i valori in alcuni punti delle funzioni $f(x)$, $g(x)$ e delle loro derivate $f'(x)$, $g'(x)$.*

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
-3	4	1	4	-4
-2	0	-3	5	-2
-1	-2	6	6	0
0	1	2	3	-1
1	-2	-3	-1	2
2	0	5	-3	1
3	-4	-6	-2	4

▶ *Si calcoli nel punto $x_0=1$ la derivata della funzione prodotto $f(x)\cdot g(x)$.*

▶ *Si calcoli nel punto* $x_0 = 0$ *la derivata della funzione composta* $f(g(x))$.

▶ *Si calcoli nel punto* $x_0 = -1$ *la derivata della funzione quoziente* $\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

■ **Esercizio 1.36.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{3x^2 + e^{-x} - 3}{2x}.$$

▶ *Si determini il dominio di* f.

▶ *Si calcolino:*

$* \lim_{x \to -\infty} f(x) =$ $* \lim_{x \to 0^-} f(x) =$

$* \lim_{x \to 0^+} f(x) =$ $* \lim_{x \to +\infty} f(x) =$

▶ *Si provi che la funzione* $f(x)$ *ammette almeno due zeri.*

▶ *Si determinino gli asintoti di* f.

▶ *Si calcoli* $f'(x)$.

▶ *Si determini l'approssimante lineare* $\bar{f}$ *di* f *nel punto* $x_0 = 1$.

1.1.15 17 novembre 2001 — Tema C

■ **Esercizio 1.37.** *La tabella seguente riporta i valori in alcuni punti delle funzioni* $f(x)$, $g(x)$ *e delle loro derivate* $f'(x)$, $g'(x)$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
-3	4	1	4	-4
-2	0	-3	5	-2
-1	-3	6	4	0
0	2	-1	3	-1
1	-2	-3	-1	-2
2	0	5	-3	1
3	-4	-6	-2	4

▶ *Si calcoli nel punto* $x_0 = 1$ *la derivata della funzione prodotto* $f(x) \cdot g(x)$.

▶ *Si calcoli nel punto* $x_0 = 0$ *la derivata della funzione composta* $f(g(x))$.

▶ *Si calcoli nel punto* $x_0 = -1$ *la derivata della funzione quoziente* $\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

■ **Esercizio 1.38.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{2x^2 + e^{2x} - 2}{3x}.$$

▶ *Si determini il dominio di* f.

▶ *Si calcolino:*

$* \lim_{x\to-\infty} f(x) =$ $* \lim_{x\to 0^-} f(x) =$

$* \lim_{x\to 0^+} f(x) =$ $* \lim_{x\to +\infty} f(x) =$

▶ *Si provi che la funzione* $f(x)$ *ammette almeno due zeri.*

▶ *Si determinino gli asintoti di* f.

▶ *Si calcoli* $f'(x)$.

▶ *Si determini l'approssimante lineare* $\bar{f}$ *di* f *nel punto* $x_0 = 1$.

1.1.16 17 novembre 2001 — Tema *D*

■ **Esercizio 1.39.** *La tabella seguente riporta i valori in alcuni punti delle funzioni* $f(x)$, $g(x)$ *e delle loro derivate* $f'(x)$, $g'(x)$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
-3	4	1	4	-4
-2	0	-3	5	-2
-1	4	5	6	0
0	1	3	1	-2
1	-2	-3	-1	-2
2	1	3	-3	1
3	-4	-6	-2	4

▶ *Si calcoli nel punto* $x_0 = 1$ *la derivata della funzione prodotto* $f(x) \cdot g(x)$.

▶ *Si calcoli nel punto $x_0 = 0$ la derivata della funzione composta $f(g(x))$.*

▶ *Si calcoli nel punto $x_0 = -1$ la derivata della funzione quoziente $\dfrac{g(x)}{f(x)}$.*

■ **Esercizio 1.40.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{3x^2 + e^x - 3}{2x}.$$

▶ *Si determini il dominio di f.*

▶ *Si calcolino:*

$* \lim_{x \to -\infty} f(x) =$ $\qquad * \lim_{x \to 0^-} f(x) =$

$* \lim_{x \to 0^+} f(x) =$ $\qquad * \lim_{x \to +\infty} f(x) =$

▶ *Si provi che la funzione $f(x)$ ammette almeno due zeri.*

▶ *Si determinino gli asintoti di f.*

▶ *Si calcoli $f'(x)$.*

▶ *Si determini l'approssimante lineare $\bar{f}$ di f nel punto $x_0 = 1$.*

1.1.17 1 DICEMBRE 2001 — TEMA *A*

■ **Esercizio 1.41.** *Si calcoli*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{\log(1 + x^3)}.$$

Risultato

$$-\frac{1}{3}$$

Svolgimento
Si tratta di una forma di indecisione del tipo $\frac{0}{0}$. Applicando il teorema di de L'Hospital, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{\log(1+x^3)} = -\frac{1}{3} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \lim_{x\to 0} \frac{1 - 1 - \tan^2 x}{\frac{3x^2}{1+x^3}} = -\lim_{x\to 0} \frac{1+x^3}{3} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{3}.$$

■ **Esercizio 1.42.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = e^{-x}\sqrt{|x-1|}.$$

▶ *Si determinino:*

- *il dominio di f:* $\quad \operatorname{dom} f = \mathbb{R}$
- *i segni di f:* $\quad f(x) > 0$ se $x \neq 1$; $f(1) = 0$
- *i limiti di f:*

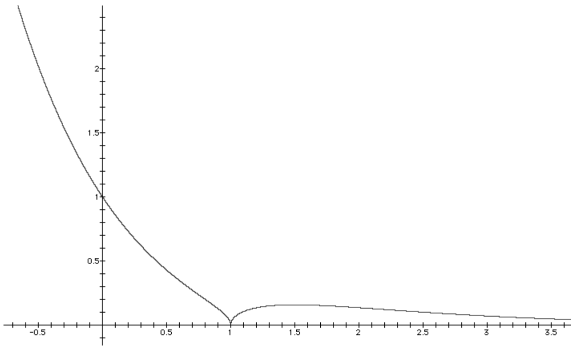
  $* \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \qquad * \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

- *gli asintoti di f:* $\quad$ la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$
- *$f'(x)$ se $x < 1$:* $\quad f'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{1-x}}(3-2x)$
- *$f'(1)$:* $\quad f'(1) = \lim_{x\to 1} \dfrac{e^{-x}\sqrt{|x-1|}}{x-1} = \infty$
- *$f'(x)$ se $x > 1$:* $\quad f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{x-1}}(3-2x)$
- *i segni di f':*

  $f'(x) < 0$ se $x < 1$; $f'(x) > 0$ se $1 < x < 3/2$; $f'(3/2) = 0$; $f'(x) < 0$ se $x > 3/2$

- *la crescenza, la decrescenza, gli estremi relativi e assoluti di f:*

  f è strettamente decrescente su $]-\infty, 1[$; f è strettamente crescente su $]1, 3/2[$; f è strettamente decrescente su $]3/2, +\infty[$; $\inf f = \min f = f(1) = 0$; $\sup f = +\infty$; $3/2$ è punto di massimo relativo con $f(3/2) = 1/\sqrt{2e^3}$.



▶ *Si determini il numero delle soluzioni* $x \in \operatorname{dom} f$ *dell'equazione* $f(x) = t$, *al variare di* $t \in \mathbb{R}$.

$t < 0$:	0 soluzioni;
$t = 0$:	1 soluzione;
$0 < t < 1/\sqrt{2e^3}$:	3 soluzioni;
$t = 1/\sqrt{2e^3}$:	2 soluzioni;
$t > 1/\sqrt{2e^3}$:	1 soluzione.

1.1.18 1 DICEMBRE 2001 — TEMA B

■ **Esercizio 1.43.** *Si calcoli*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2\,x + 2\,\log(1+x)}{2\,(\sin x)^3}.$$

■ **Esercizio 1.44.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = e^x \sqrt{|x+1|}.$$

▶ *Si determinino:*

- *il dominio di* f*:*

- *i segni di* f*:*

- *i limiti di f:*

$$* \lim_{x\to-\infty} f(x) = \qquad\qquad * \lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

- *gli asintoti di f:*
- *$f'(x)$ se $x < -1$:*
- *$f'(-1)$:*
- *$f'(x)$ se $x > -1$:*
- *i segni di f':*
- *la crescenza, la decrescenza, gli estremi relativi e assoluti di f:*

▶ *Si determini il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.*

1.1.19 1 DICEMBRE 2001 — TEMA *C*

■ **Esercizio 1.45.** *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{3\,(\sin x)^3}.$$

■ **Esercizio 1.46.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = e^x \sqrt{|x-1|}.$$

▶ *Si determinino:*

- *il dominio di f:*
- *i segni di f:*
- *i limiti di$f$:*

$$* \lim_{x\to-\infty} f(x) = \qquad\qquad * \lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

- *gli asintoti di f:*
- *$f'(x)$ se $x < 1$:*
- *$f'(1)$:*
- *$f'(x)$ se $x > 1$:*
- *i segni di f':*
- *la crescenza, la decrescenza, gli estremi relativi e assoluti di f:*

▶ *Si determini il numero delle soluzioni* $x \in \operatorname{dom} f$ *dell'equazione* $f(x) = t$*, al variare di* $t \in \mathbb{R}$*.*

1.1.20 1 dicembre 2001 — Tema D

■ **Esercizio 1.47.** *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{3\,\log(1 + x^3)}.$$

■ **Esercizio 1.48.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = e^{-x}\sqrt{|x + 1|}.$$

▶ *Si determinino;*

- *il dominio di* f*:*
- *i segni di* f*:*
- *i limiti di* f*:*

  $* \lim_{x\to -\infty} f(x) =$ $* \lim_{x\to +\infty} f(x) =$

- *gli asintoti di* f*:*
- $f'(x)$ se $x < -1$:
- $f'(-1)$:
- $f'(x)$ *se* $x > -1$*:*
- *i segni di* f'*:*
- *la crescenza, la decrescenza, gli estremi relativi e assoluti di* f*:*

▶ *Si determini il numero delle soluzioni* $x \in \operatorname{dom} f$ *dell'equazione* $f(x) = t$*, al variare di* $t \in \mathbb{R}$*.*

1.1.21 22 DICEMBRE 2001 — TEMA A

■ **Esercizio 1.49.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_0^{x/2} (e^{4t^2} + 4t^2)\, dt.$$

► *Si calcolino:*

- $f'(x) \;=\; \frac{1}{2}(e^{x^2} + x^2)$
- $f''(x) \;=\; x(e^{x^2} + 1)$
- $f'''(x) = \; e^{x^2}(1 + 2x^2) + 1.$

► *Si scriva il polinomio di Taylor* $p_{3,0}$ *di ordine* 3 *di* f *con punto iniziale* $x_0 = 0$*:*

$$p_{3,0}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^3.$$

► *Si determini* $\operatorname{ord}_0 f$*:*

$$\operatorname{ord}_0 f = 1.$$

► *Si studi la concavità, la convessità e l'esistenza di punti di flesso di* f*.*

Poiché $f''(x) < 0$ se $x < 0$, $f''(x) > 0$ se $x > 0$ e $f''(0) = 0$, si conclude che f è concava su $]-\infty, 0[$, è convessa su $]0, +\infty[$ e che 0 è punto di flesso ascendente.

■ **Esercizio 1.50.** *Si consideri la funzione razionale*

$$f(x) = \frac{x+1}{(x^2+4)\,(x-2)}.$$

► *Si decomponga* f *con il metodo di Hermite.*

Le radici del polinomio a denominatore sono $2, -2i, 2i$, ognuna avente molteplicità 1. Pertanto si ha

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{x+1}{(x^2+4)(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x+1 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-2) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x+1 = (A+B)x^2 + (C-2B)x + (4A-2C) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \begin{cases} A + \ \ B = 0 \\ C - 2B = 1 \\ 4A - 2C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3/8 \\ B = -3/8 \\ C = 1/4 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Quindi risulta

$$f(x) = \frac{3}{8(x-2)} + \frac{-3x+2}{8(x^2+4)}.$$

▶ *Si determini l'insieme delle primitive di* f *su* $]2,+\infty[$.

L'insieme delle primitive di f su $]2,+\infty[$ è:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x+1}{(x^2+4)(x-2)}\,dx = \\
&= \frac{3}{8}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{3}{16}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + \frac{1}{8}\int \frac{1/2}{(x/2)^2+1}\,dx = \\
&= \frac{3}{8}\log(x-2) - \frac{3}{16}\log(x^2+4) + \frac{1}{8}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c,
\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

1.1.22 22 DICEMBRE 2001 — TEMA B

■ **Esercizio 1.51.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_0^{2x} (e^{t^2} + t^2)\,dt.$$

▶ *Si calcolino:*

- $f'(x)\ \ =$
- $f''(x)\ =$
- $f'''(x) =$

▶ *Si scriva il polinomio di Taylor* $p_{3,0}$ *di ordine* 3 *di* f *con punto iniziale* $x_0 = 0$.

▶ *Si determini* $\operatorname{ord}_0 f$.

▶ *Si studi la concavità, la convessità e l'esistenza di punti di flesso di f.*

■ **Esercizio 1.52.** *Si consideri la funzione razionale*

$$f(x) = \frac{x-1}{(x^2+4)(x+2)}.$$

▶ *Si decomponga f con il metodo di Hermite.*

▶ *Si determini l'insieme delle primitive di f su $]-2, +\infty[$.*

1.1.23 22 dicembre 2001 — Tema C

■ **Esercizio 1.53.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_0^{2x} (e^{-t^2} - t^2)\, dt.$$

▶ *Si calcolino:*

- $f'(x) =$
- $f''(x) =$
- $f'''(x) =$

▶ *Si scriva il polinomio di Taylor $p_{3,0}$ di ordine 3 di f con punto iniziale $x_0 = 0$.*

▶ *Si determini $\operatorname{ord}_0 f$.*

▶ *Si studi la concavità, la convessità e l'esistenza di punti di flesso di f.*

■ **Esercizio 1.54.** *Si consideri la funzione razionale*

$$f(x) = \frac{x+1}{(x^2+4)(x+2)}.$$

▶ *Si decomponga f con il metodo di Hermite.*

▶ *Si determini l'insieme delle primitive di f su $]-2, +\infty[$.*

1.1.24 22 dicembre 2001 — Tema D

■ **Esercizio 1.55.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_0^{-x} (e^{t^2} + t^2)\, dt.$$

▶ *Si calcolino:*

- $f'(x) \ \ =$
- $f''(x) \ =$
- $f'''(x) =$

▶ *Si scriva il polinomio di Taylor* $p_{3,0}$ *di ordine* 3 *di* f *con punto iniziale* $x_0 = 0$.

▶ *Si determini* $\operatorname{ord}_0 f$.

▶ *Si studi la concavità, la convessità e l'esistenza di punti di flesso di* f.

■ **Esercizio 1.56.** *Si consideri la funzione razionale*

$$f(x) = \frac{x+1}{(x^2+4)\,(x-1)}.$$

▶ *Si decomponga* f *con il metodo di Hermite.*

▶ *Si determini l'insieme delle primitive di* f *su* $]1, +\infty[$.

1.2 Temi d'esame

1.2.1 14 gennaio 2002

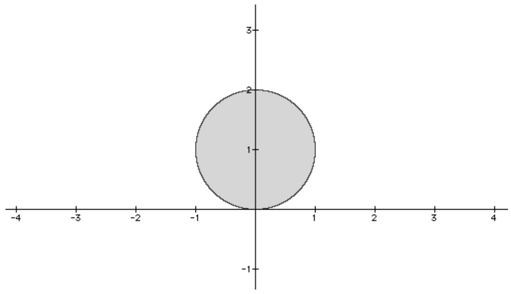
■ **Esercizio 1.57.** *Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme* S *dei numeri complessi* z *tali che*

$$\big|\, |z-i\,| - i\,\big| \le \sqrt{2},$$

dove $|w|$ *indica il modulo del numero complesso* w.

Risultato

$$S = \left\{x + iy : x^2 + (y-1)^2 \leq 1\right\}$$



Svolgimento
Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\Big|\, |z - i| - i \,\Big| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\sqrt{x^2 + (y-1)^2} - i\right| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} \leq \sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; x^2 + (y-1)^2 \leq 1.$$

■ **Esercizio 1.58.** *Si consideri l'insieme di numeri reali*

$$E = \{x \in \mathbb{R} : (x \in \mathbb{N}) \vee ({}^1\!/_x \in \mathbb{N})\}.$$

Si determinino:

▶ $\inf E =$ 0 $(= \min E)$

▶ $\sup E =$ $+\infty$

▶ *l'insieme dei punti di accumulazione di* E*:* $\{0, +\infty\}$

▶ $\inf \mathcal{C}(E) =$ $-\infty$

▶ $\sup \mathcal{C}(E) =$ $+\infty$

[$\mathcal{C}(E)$ indica il complementare di E in $\mathbb{R}$.]

■ **Esercizio 1.59.** *Si calcoli, utilizzando i limiti notevoli,*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+2}{x^2+1}\right)^{2x+3}.$$

Risultato

$$e^2$$

Svolgimento
Si ha

$$\left(\frac{x^2+x+2}{x^2+1}\right)^{2x+3} = \left(1+\frac{x+1}{x^2+1}\right)^{2x+3} =$$
$$= \left[\left(1+\frac{x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x+1}}\right]^{\frac{(x+1)(2x+3)}{x^2+1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^2.$$

■ **Esercizio 1.60.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = x^3\log(x^\pi)\,.$$

▶ *Si determinino:*

- *il dominio e i segni di f:*

  $$\operatorname{dom} f =]0,+\infty[;\ f(x)<0 \text{ in }]0,1[\,,\ \ f(1)=0,\quad f(x)>0 \text{ in }]1,+\infty[$$

- *i limiti di f:*

  $$* \lim_{x\to0^+} f(x) = 0 \qquad\qquad * \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- *la derivata prima di f:*

  $$f'(x) = \pi x^2(3\log x + 1)$$

- *i limiti di f':*

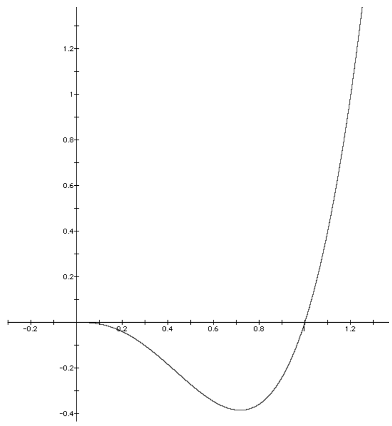
  $$* \lim_{x\to0^+} f'(x) = 0 \qquad\qquad * \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$$

- *i punti di annullamento e i segni di f':*

  $f'(x) < 0$ in $]0, 1/\sqrt[3]{e}[$, $\quad f'(1/\sqrt[3]{e}) = 0$, $\quad f'(x) > 0$ in $]1/\sqrt[3]{e}, +\infty[$

- *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:*

  f è strettamente decrescente su $]0, 1/\sqrt[3]{e}[$, f è strettamente crescente su $]1/\sqrt[3]{e}, +\infty[$, $\min f = f(1/\sqrt[3]{e}) = -\pi/3e$, $\sup f = +\infty$.



► *Si determini il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.*

$t < -\pi/3e$:	0 soluzioni,
$t = -\pi/3e$:	1 soluzione,
$-\pi/3e < t < 0$:	2 soluzioni,
$t \geq 0$:	1 soluzione.

■ **Esercizio 1.61.** *Si determini una primitiva F su $\mathbb{R}$ della funzione*

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

Risultato

$$F(x) = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)}$$

Svolgimento
Le radici del polinomio a denominatore sono i e $-i$, ognuna avente molteplicità 2. Pertanto si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x^2+1)^2} &= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{Cx+D}{x^2+1}\right) = \\ &= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C(x^2+1)-2x(Cx+D)}{(x^2+1)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 &= (Ax+B)(x^2+1) + C(x^2+1) - 2x(Cx+D) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 &= Ax^3 + (B-C)x^2 + (A-2D)x + (B+C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A \qquad = 0 \\ B - \ C = 0 \\ A - 2D = 0 \\ B + \ C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1/2 \\ C = 1/2 \\ D = 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

Quindi risulta

$$f(x) = \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2(x^2+1)}\right).$$

L'insieme delle primitive di f su $\mathbb{R}$ è

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$.

■ **Esercizio 1.62.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_0^{2x} \sin(t^2)\, dt.$$

► *Si calcolino:*

- $f'(x) = \quad 2\sin(4x^2)$
- $f''(x) = \quad 16x\cos(4x^2)$
- $f'''(x) = \quad 16\cos(4x^2) - 128\, x^2 \sin(4x^2)$

► *Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 3 di f con punto iniziale $x_0 = 0$.*

Poiché $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ e $f'''(0) = 16$, si ha

$$p_{3,0}(x) = \frac{8}{3}x^3.$$

▶ *Si determini* $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

Si ha, per la formula di Taylor-Peano,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{p_{3,0}(x) + \varepsilon(x)x^3}{x^3} = \frac{8}{3} + \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = \frac{8}{3}.$$

1.2.2 28 GENNAIO 2002

■ **Esercizio 1.63.** *Si trovi la forma trigonometrica delle soluzioni dell'equazione*

$$i \cdot z^3 = (\bar{z})^5,$$

dove $\bar{z}$ *indica il coniugato del numero complesso* z.

Risultato

$$0; \quad \left[1, -\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4}\right], \text{ con } k \in \{0, 1, \ldots, 7\}$$

Svolgimento
Posto $z = [\rho, \vartheta] = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, con $\rho \geq 0$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} i \cdot z^3 = (\bar{z})^5 &\Leftrightarrow \left[1, \tfrac{\pi}{2}\right] \cdot \left[\rho^3, 3\vartheta\right] = \left[\rho^5, -5\vartheta\right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\rho^3, 3\vartheta + \tfrac{\pi}{2}\right] = \left[\rho^5, -5\vartheta\right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = \rho^5 \\ 3\vartheta + \frac{\pi}{2} = -5\vartheta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\rho = 0) \vee \begin{cases} \rho = 1 \\ \vartheta = -\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4} \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}. \end{aligned}$$

Le soluzioni distinte si ottengono per $k = 0, 1, \ldots, 7$.

■ **Esercizio 1.64.** *Si dimostri per induzione che, per ogni* $n \in \mathbb{N}^+$, *si ha*

$$\frac{d^n}{dx^n}(x \cdot e^x) = (x + n) \cdot e^x.$$

Svolgimento
Consideriamo il predicato p definito su $\mathbb{N}^+$ da

$$p(n) = \text{«}\frac{d^n}{dx^n}(x \cdot e^x) = (x+n) \cdot e^x\text{»}.$$

- Per $n = 1$ risulta

$$p(1) = \frac{d}{dx}(x \cdot e^x) = e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x,$$

cioè $p(1)$ è vera.

- Se $p(n)$ è vera, allora risulta

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x \cdot e^x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}(x \cdot e^x)\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left((x+n) \cdot e^x\right) = e^x + (x+n) \cdot e^x = (x+n+1) \cdot e^x,$$

cioè $p(n+1)$ è vera.

Il principio d'induzione assicura che $p(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

■ **Esercizio 1.65.** *Si dimostri che l'equazione*

$$\cos x - x^3 \arctan x = 0$$

ha almeno due soluzioni (di segno opposto).

Svolgimento
Definiamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo $f(x) = \cos x - x^3 \arctan x$. Si ha che f è pari e continua, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $f(0) = 1$. Poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, esiste $b > 0$ tale che $f(b) < 0$. Il teorema degli zeri, applicato sull'intervallo $[0, b]$ alla funzione continua f, assicura l'esistenza di un $c > 0$ tale che $f(c) = 0$. Infine, essendo f pari, risulta anche $f(-c) = 0$.

■ **Esercizio 1.66.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = |x| \cdot 2^x\,.$$

▶ *Si determinino:*

- *il dominio e i segni di f:*

  $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$; $f(x) > 0$ se $x \neq 0$; $f(0) = 0$

- *i limiti di f:*

  $* \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\qquad$ $* \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- *la derivata prima di f:*

$$f'(x) = \begin{cases} -2^x(1 + x\log 2), & \text{se } x < 0, \\ 2^x(1 + x\log 2), & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- *i limiti di f':*

  $* \lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0$ $\qquad$ $* \lim_{x\to0^-} f'(x) = -1$

  $* \lim_{x\to0^+} f'(x) = 1$ $\qquad$ $* \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$

- *i segni di f':*

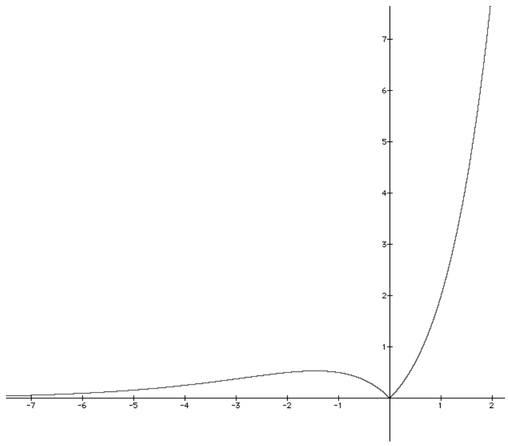
  $f'(x) > 0$ se $x \in\,]-\infty, -1/\log 2[\, \cup\,]0, +\infty[$; $f'(-1/\log 2) = 0$; $f'(x) < 0$ se $x \in\,]-1/\log 2, 0[$

- *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:*

  f è strettamente crescente su $]-\infty, -1/\log 2[$ e su $]0, +\infty[$; f è strettamente decrescente su $]-1/\log 2, 0[$; $\min f = f(0) = 0$; $\sup f = +\infty$; $-1/\log 2$ è punto di massimo relativo, con $f(-1/\log 2) = \frac{1}{e\log 2}$.

► *Si determini il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.*

$t < 0$:	0 soluzioni,
$t = 0$:	1 soluzione,
$0 < t < \frac{1}{e\log 2}$:	3 soluzioni,
$t = \frac{1}{e\log 2}$:	2 soluzioni,
$t > \frac{1}{e\log 2}$:	1 soluzione.



■ **Esercizio 1.67.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2}.$$

▶ *Si determini l'insieme delle primitive di f su* $[0, 1]$.

Dividendo x^3 per $x^2 - 2$, si ottiene

$$\frac{x^3}{x^2 - 2} = x + \frac{2x}{x^2 - 2}.$$

Quindi l'insieme delle primitive di f su $[0, 1]$ è

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 2}\ dx = \int x\ dx + \int \frac{2x}{x^2 - 2}\ dx = \frac{x^2}{2} + \log(2 - x^2) + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$.

▶ *Si calcoli* $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Si ha

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \left[\frac{x^2}{2} + \log(2 - x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \log 2.$$

■ **Esercizio 1.68.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_0^{2x} \frac{t}{t+e^t}\,dt$$

sull'intervallo $[0,+\infty[$.

▶ *Si calcolino:*

- $f'(x) = \dfrac{4x}{2x+e^{2x}}$
- $f''(x) = \dfrac{4e^{2x}(1-2x)}{(2x+e^{2x})^2}$

▶ *Si studino la concavità, la convessità e l'esistenza di punti di flesso di* f *su* $[0,+\infty[$.

Si ha $f''(x) > 0$ se $x \in [0,1/2[$; $f''(1/2) = 0$; $f''(x) < 0$ se $x \in]1/2,+\infty[$.

Quindi f è convessa su $[0,1/2[$, è concava su $]1/2,+\infty[$ e $1/2$ è punto di flesso discendente.

1.2.3 11 febbraio 2002

■ **Esercizio 1.69.** *Si determini la parte reale del numero complesso*

$$(1+i)^{2002}.$$

Risultato

$$0$$

Svolgimento

Poiché la forma polare di $1+i$ è $[\sqrt{2}, \pi/4]$, segue dalla formula di De Moivre

$$(1+i)^{2002} = \left[\left(\sqrt{2}\right)^{2002}, 2002\cdot\tfrac{\pi}{4}\right] = \left[2^{1001}, 1001\cdot\tfrac{\pi}{2}\right],$$

cioè

$$(1+i)^{2002} = 2^{1001}\left(\cos\left(1001\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) + i\,\sin\left(1001\cdot\tfrac{\pi}{2}\right)\right).$$

Quindi risulta

$$\Re(1+i)^{2002} = 0.$$

■ **Esercizio 1.70.** *Si consideri l'insieme di numeri reali*

$$E = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \mathbb{Z},$$

dove $\mathbb{Z}$ *indica l'insieme dei numeri interi relativi.*

Si determinino:

▶ $\inf E =$	$-\infty$
▶ $\sup E =$	$+\infty$
▶ *l'insieme dei punti di accumulazione di E:*	$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \{-\infty, +\infty\}$
▶ *l'insieme dei punti isolati di E:*	$\mathbb{Z} \setminus \{0\}$
▶ *l'insieme dei punti interni di E:*	$\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

■ **Esercizio 1.71.** *Si calcoli, utilizzando i limiti notevoli,*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \log(1 + 2\tan x)}{1 - \cos x}.$$

Risultato

$$4$$

Svolgimento
Si ha

$$\frac{x \cdot \log(1 + 2\tan x)}{1 - \cos x} = \frac{\log(1 + 2\tan x)}{2\tan x} \cdot \frac{2\tan x}{1 - \cos x} \cdot x =$$
$$= \frac{\log(1 + 2\tan x)}{2\tan x} \cdot \frac{2\tan x}{x} \cdot \frac{x^2}{1 - \cos x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4.$$

■ **Esercizio 1.72.** *Si consideri, sull'intervallo* $\left[\frac{1}{2e}, e\right]$, *la funzione*

$$f(x) = x \cdot |\log x|.$$

▶ *Si determinino:*

- *i segni di f:*

  $f(x) > 0$ se $x \in [\frac{1}{2e}, e] \setminus \{1\}$; $f(1) = 0$

- *la derivata prima di f:*

$$f'(x) = \begin{cases} -(\log x + 1), & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2e}, 1\right[, \\ \log x + 1, & \text{se } x \in]1, e] \end{cases}$$

- *i punti di annullamento e i segni di f':*

  $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$; $f'(x) > 0$ se $x \in \left[\frac{1}{2e}, \frac{1}{e}\right[\cup]1, e]$; $f'(x) < 0$ se $x \in \left]\frac{1}{e}, 1\right[$

- *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:*

  f è strettamente decrescente su $\left]\frac{1}{e}, 1\right[$; f è strettamente crescente su $\left[\frac{1}{2e}, \frac{1}{e}\right[$ e su $]1, e]$; $\min f = f(1) = 0$; $\max f = f(e) = e$; $\frac{1}{2e}$ è punto di minimo relativo, con $f\left(\frac{1}{2e}\right) = \frac{1+\log 2}{2e}$; $\frac{1}{e}$ è punto di massimo relativo, con $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$.

- *la derivata seconda di f:*

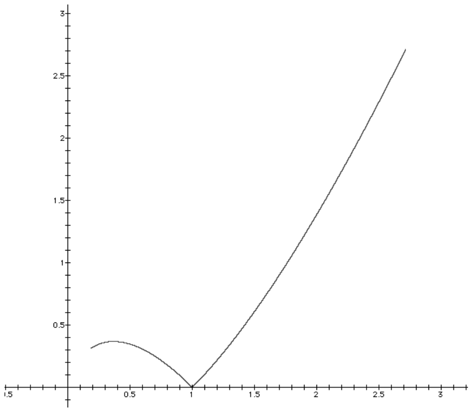
$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2e}, 1\right[, \\ \frac{1}{x}, & \text{se } x \in]1, e] \end{cases}$$

- *la concavità, la convessità e i punti di flesso di f:*

  f è concava su $\left[\frac{1}{2e}, 1\right[$; f è convessa su $]1, e]$

▶ *Si determini il numero delle soluzioni $x \in \left[\frac{1}{2e}, e\right]$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$..*

$t < 0$:	0 soluzioni,
$t = 0$:	1 soluzione,
$0 < t < f\left(\frac{1}{2e}\right)$:	2 soluzioni,
$f\left(\frac{1}{2e}\right) \leq t < f\left(\frac{1}{e}\right)$:	3 soluzioni,
$t = f\left(\frac{1}{e}\right)$:	2 soluzioni,
$f\left(\frac{1}{e}\right) < t \leq f(e)$:	1 soluzione,
$t > f(e)$:	0 soluzioni.



■ **Esercizio 1.73.** *Si calcoli*

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 x\, e^t \, dt \right) dx.$$

Risultato

$$\frac{e}{2} - 1$$

Svolgimento
Si ha

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 x\ e^t\ dt \right) dx = \int_0^1 x \left[e^t \right]_x^1 dx = \int_0^1 x(e - e^x)\ dx =$$
$$= \frac{e}{2} \left[x^2 \right]_0^1 - \left[x\ e^x \right]_0^1 + \int_0^1 e^x\ dx = \frac{e}{2} - 1.$$

■ **Esercizio 1.74.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_1^{x^2} \frac{t}{t^2 + 1}\, dt.$$

Si determinino:

▶ *la derivata prima di f:*

$$f'(x) = \frac{2x^3}{x^4+1}$$

▶ *l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(1,0)$:*

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 0 + 1(x-1) = x - 1$$

▶ *il limite di f per $x \to +\infty$:*

$$\int_1^{x^2} \frac{t}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\left[\log(t^2+1)\right]_1^{x^2} = \frac{1}{2}\left(\log(x^4+1) - \log 2\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

1.2.4 17 giugno 2002

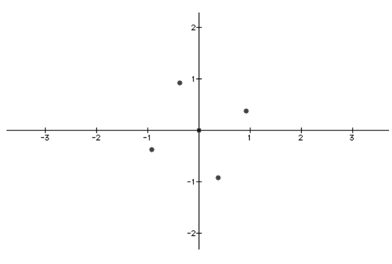
■ **Esercizio 1.75.** *Si determinino e si rappresentino nel piano di Gauss le soluzioni dell'equazione*

$$z^3 = i\,\bar{z}\,|z|,$$

dove $\bar{z}$ e $|z|$ sono, rispettivamente, il coniugato e il modulo del numero complesso z.

Risultato

$$z_0 = 0,\ z_1 = \left[1, \frac{1}{8}\pi\right],\ z_2 = \left[1, \frac{5}{8}\pi\right],\ z_3 = \left[1, \frac{9}{8}\pi\right],\ z_4 = \left[1, \frac{13}{8}\pi\right]$$



Svolgimento
Posto $z = [\rho, \vartheta] = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, con $\rho \geq 0$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} z^3 = i\,\bar{z}\,|z| &\Leftrightarrow \left[\rho^3, 3\vartheta\right] = \left[1, \tfrac{\pi}{2}\right] \cdot [\rho, -\vartheta] \cdot [\rho, 0] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\rho^3, 3\vartheta\right] = \left[\rho^2, \tfrac{\pi}{2} - \vartheta\right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = \rho^2 \\ 3\vartheta = \frac{\pi}{2} - \vartheta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\rho = 0) \vee \begin{cases} \rho = 1 \\ \vartheta = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}). \end{cases} \end{aligned}$$

Le soluzioni distinte si ottengono per $k = 0, 1, 2, 3$.

■ **Esercizio 1.76.** *Si consideri l'insieme di numeri reali*

$$E = \{x \in \mathbb{R} : (x \neq 0) \wedge (\sin(1/x) = 0\}.$$

Si determinino:

▶ $\inf E =$	$-\frac{1}{\pi}$ $(= \min E)$
▶ $\sup E =$	$\frac{1}{\pi}$ $(= \max E)$
▶ *l'insieme dei punti di accumulazione di E:*	$\{0\}$
▶ $\inf(E \cap]0, +\infty[\,) =$	0
▶ $\sup(E \cap]-\infty, 0[\,) =$	0

■ **Esercizio 1.77.** *Si calcoli, utilizzando i limiti notevoli,*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot (2x+1)^x}{(2x)^{x+1}}.$$

Risultato

$$\frac{\sqrt{e}}{2}$$

Svolgimento
Si ha

$$\begin{aligned} \frac{x \cdot (2x+1)^x}{(2x)^{x+1}} &= \frac{x \cdot (2x+1)^x}{2x \cdot (2x)^x} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^x = \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{1/2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\sqrt{e}}{2}. \end{aligned}$$

■ **Esercizio 1.78.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^3 + 1}\,.$$

▶ *Si determinino:*

- *il dominio e i segni di f:*

  $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$; $f(0) = f(-1) = 0$, $f(x) > 0$ se $x \in\,]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, $f(x) < 0$ se $x \in]-1, 0[$.

- *i limiti di f:*

  $$* \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad * \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- *la derivata prima di f:*

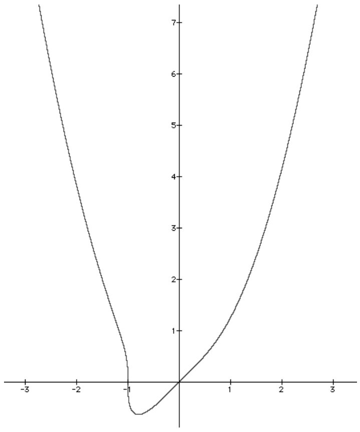
  $$f'(x) = \frac{2x^3 + 1}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}} \quad \text{se } x \neq -1, \qquad f'(-1) = -\infty$$

- *i segni di f':*

  $f'(x) < 0$ per $x \in]-\infty, -1[\cup \left]-1, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right[$, $f'\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 0$, $f'(x) > 0$ per $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right[$

- *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:*

  f è strettamente decrescente per $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right[$, f è strettamente crescente per $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right[$, $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ è punto di minimo relativo, $\inf f = \min f = f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, $\sup f = +\infty$.



► *Si determini il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.*

$t < -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$:	0 soluzioni,
$t = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$:	1 soluzione,
$t > -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$:	2 soluzioni.

■ **Esercizio 1.79.** *Posto*

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)},$$

si determini una primitiva F di f sull'intervallo $[0, +\infty[$.

Risultato

$$F(x) = \frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{1}{4}\log(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x$$

Svolgimento

Le radici del polinomio a denominatore sono -1, i e $-i$, ognuna avente molteplicità 1. Pertanto si ha

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 = (A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/2 \\ C = 1/2 \end{cases}.$$

Quindi risulta

$$f(x) = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{-x+1}{2(x^2+1)}.$$

L'insieme delle primitive di f su $[0, +\infty[$ è

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{4} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx =$$
$$= \frac{1}{2} \log(x+1) - \frac{1}{4} \log(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctan x + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$.

■ **Esercizio 1.80.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_x^{2x} \sin(t^2)\, dt.$$

▶ *Si calcolino:*

- $f'(x) = \quad 2\sin(4x^2) - \sin(x^2)$
- $f''(x) = \quad 16x\, \cos(4x^2) - 2x\, \cos(x^2)$

▶ *Si determini* $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

Si ha, per il teorema di de L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{7}{3} \Leftarrow \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{3x^2} = \frac{7}{3} \Leftarrow$$
$$\Leftarrow \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{16x\, \cos(4x^2) - 2x\, \cos(x^2)}{6x} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

1.2.5 1 LUGLIO 2002

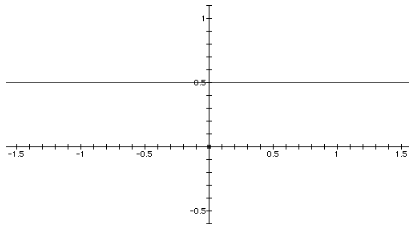
■ **Esercizio 1.81.** *Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E degli $z \in \mathbb{C}$ tali che*

$$\frac{\bar{z} + i}{z} \in \mathbb{R},$$

dove $\bar{z}$ indica il coniugato del numero complesso z.

Risultato

$$E = \{0 + yi : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \cup \left\{x + \tfrac{1}{2}i : x \in \mathbb{R}\right\}$$



Svolgimento
Posto $z = x + yi$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha, per $z \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{z} + i}{z} = \frac{x + (1-y)i}{x + yi} &= \frac{x + (1-y)i}{x + yi} \cdot \frac{x - yi}{x - yi} = \\ &= \frac{(x^2 + y - y^2) + (-xy + x - xy)i}{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{x^2 + y - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{x - 2xy}{x^2 + y^2} i \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\bar{z} + i}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x(1 - 2y) = 0,$$

ossia se e solo se

$$(x = 0) \vee (y = \tfrac{1}{2}), \text{ con } (x, y) \neq (0, 0).$$

■ **Esercizio 1.82.** *Si consideri l'insieme di numeri reali*

$$E = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 2\right\} \cup \mathbb{N},$$

dove $\mathbb{N}$ *indica l'insieme dei numeri naturali.*

Si determinino:

► $\inf(E \cap [0, +\infty[\,) =$ $\quad 0 = \min(E \cap [0, +\infty[\,)$

► $\sup(E \cap]-\infty, 0[\,) =$ $\quad -\sqrt{2} \notin E$

► *l'insieme dei punti di accumulazione di* E: $\quad]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$

▶ *l'insieme dei punti isolati di E:* $\{0, 1\}$

▶ *l'insieme dei punti interni di E:* $]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

■ **Esercizio 1.83.** *Si provi che l'equazione*

$$x^2 + 1 = \frac{1}{x} - \arctan x$$

ha, per $x > 0$, una e una sola soluzione reale.

Svolgimento
Consideriamo la funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x^2 + 1 - \frac{1}{x} + \arctan x.$$

La funzione f è strettamente crescente, essendo tali le funzioni x^2, $1 - 1/x$ e $\arctan x$. L'equazione $f(x) = 0$ non può avere piú di una soluzione positiva. Inoltre si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Esistono perciò a, b positivi tali che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Essendo f continua in $]0, +\infty[$, esiste un (unico) numero reale $c \in]a, b[$ con $f(c) = 0$.

■ **Esercizio 1.84.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = e^{-x} \sqrt{x + 1}.$$

▶ *Si determinino:*

- *il dominio e i segni di f:*

  $\operatorname{dom} f = [-1, +\infty[$. $f(-1) = 0$, $f(x) > 0$ per $x > -1$.

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ 0

- $f'(x) =$ $-\dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{x+1}}(2x + 1)$, per $x > -1$

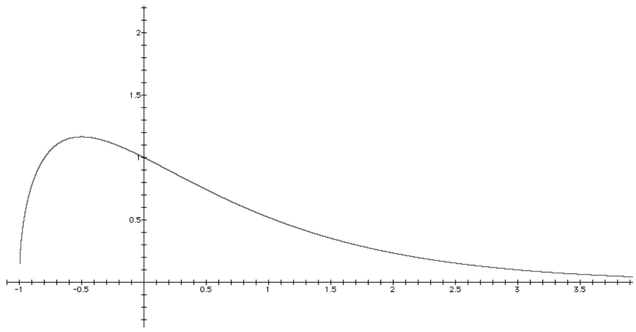
- $f'(-1) =$ $+\infty$

- *i punti di annullamento e i segni di f':*

  $f'(x) > 0$ in $]-1, -1/2[$, $f'(-1/2) = 0$, $f'(x) < 0$ in $]-1/2, +\infty[$.

- *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:*

  f è strettamente crescente in $[-1, -1/2[$, strettamente decrescente in $]-1/2, +\infty[$, $-1/2$ è punto di massimo relativo, $\min f = f(-1) = 0$, $\max f = f(-1/2) = \sqrt{e/2}$.



► *Si determini il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.*

$t < 0$:	0 soluzioni,
$t = 0$:	1 soluzione,
$0 < t < \sqrt{e/2}$:	2 soluzioni,
$t = \sqrt{e/2}$:	1 soluzione,
$t > \sqrt{e/2}$:	0 soluzioni.

■ **Esercizio 1.85.** *Si calcoli*

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{x+1} x\, e^{-t}\, dt \right) dx.$$

Risultato

$$1 - \frac{1}{e}$$

Svolgimento
Si ha

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{x+1} x\,e^{-t}\,dt\right)dx = \int_0^{+\infty} x\left(\int_x^{x+1} e^{-t}\,dt\right)dx = \\
&= \int_0^{+\infty} x\left(\left[-e^{-t}\right]_x^{x+1}\right)dx = \int_0^{+\infty}\left(-xe^{-x-1}+xe^{-x}\right)dx = \\
&= \int_0^{+\infty}(1-e^{-1})xe^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t (1-e^{-1})xe^{-x}dx = \\
&= (1-e^{-1})\lim_{t\to+\infty}\left(\left[x(-e^{-x})\right]_0^t - \int_0^t(-e^{-x})dx\right) = \\
&= (1-e^{-1})\lim_{t\to+\infty}\left(-te^{-t}+0-\left[e^{-x}\right]_0^t\right) = \\
&= (1-e^{-1})\lim_{t\to+\infty}\left(-te^{-t}-e^{-t}+e^0\right) = 1-e^{-1}.
\end{aligned}$$

■ **Esercizio 1.86.** *Si consideri, per $x > 1$, la funzione*

$$f(x) = \int_2^{x^2} \frac{1}{\log t}\,dt.$$

▶ Si determinino:

- $f'(x) = \dfrac{x}{\log x}$
- $f''(x) = \dfrac{\log x - 1}{(\log x)^2}$

▶ *Si studi la concavità, la convessità e l'esistenza di punti di flesso di f.*

Essendo $f''(x) < 0$ per $x \in]1, e[$, $f''(e) = 0$, $f''(x) > 0$ per $x \in]e, +\infty[$, si ha che f è concava in $]1, e[$, convessa in $]e, +\infty[$ e che il punto e è di flesso ascendente.

1.2.6 15 luglio 2002

■ **Esercizio 1.87.** *Si determinino gli $n \in \mathbb{N}$ per cui risulta*

$$\left|\frac{3+4i}{(1+2i)^n}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}},$$

dove $|z|$ indica il modulo del numero complesso z.

Risultato

$$n \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Svolgimento
Si ha

$$\left|\frac{3+4i}{(1+2i)^n}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sqrt{5}\,|3+4i| \geq |(1+2i)^n| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{5} \geq |1+2i|^n \Leftrightarrow 5\sqrt{5} \geq \left(\sqrt{5}\right)^n \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}\right)^3 \geq \left(\sqrt{5}\right)^n \Leftrightarrow 3 \geq n.$$

■ **Esercizio 1.88.** *Si consideri l'insieme di numeri reali*

$$E = \mathbb{N} \cup \left\{-2^{-n} : n \in \mathbb{N}\right\},$$

dove $\mathbb{N}$ *indica l'insieme dei numeri naturali.*

Si determinino:

- ▶ $\inf E =$ $\quad -1 = \min E$
- ▶ $\sup E =$ $\quad +\infty$
- ▶ *l'insieme dei punti di accumulazione di E:* $\{0, +\infty\}$
- ▶ *l'insieme dei punti isolati di E:* $E \setminus \{0\}$
- ▶ *l'insieme dei punti interni di E:* $\emptyset$

■ **Esercizio 1.89.** *Si calcoli, usando i limiti notevoli,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos(2x)-1)\sin(3x)}{x^2(e^{4x}-1)}.$$

Risultato

$$-\frac{3}{2}$$

Svolgimento
Si ha

$$\frac{(\cos(2x)-1)\sin(3x)}{x^2(e^{4x}-1)} = 4\frac{\cos(2x)-1}{(2x)^2} \cdot \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{3x}{4x} \cdot \frac{4x}{e^{4x}-1} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{3}{2}.$$

■ **Esercizio 1.90.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{x}{1 - \log x}.$$

▶ *Si determinino:*

- *il dominio e i segni di f:*

  $\operatorname{dom} f =]0, e[\cup]e, +\infty[$, $f(x) > 0$ per $x \in]0, e[$, $f(x) < 0$ per $x \in]e, +\infty[$

- *i limiti di f:*

  $$* \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \qquad * \lim_{x\to e^-} f(x) = +\infty$$
  $$* \lim_{x\to e^+} f(x) = -\infty, \qquad * \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

- *la derivata prima di f:*

  $$f'(x) = \frac{2 - \log x}{(1 - \log x)^2}$$

- *i limiti di f':*

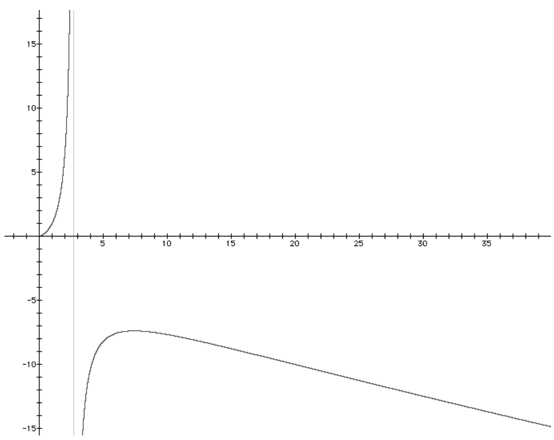
  $$* \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \qquad * \lim_{x\to +\infty} f'(x) = 0$$

- *i punti di annullamento e i segni di f':*

  $f'(x) > 0$ per $x \in]0, e[\cup]e, e^2[$, $f'(e^2) = 0$, $f'(x) < 0$ per $x \in]e^2, +\infty[$

- *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:*

  $f(x)$ è strettamente crescente per $x \in]0, e[\cup]e, e^2[$, e^2 è punto di massimo relativo, con $f(e^2) = -e^2$, $f(x)$ è strettamente decrescente per $x \in]e^2, +\infty[$, $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$.



► *Si determini il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.*

$t < -e^2$:	2 soluzioni,
$t = -e^2$:	1 soluzione,
$-e^2 < t \leq 0$:	0 soluzioni,
$t > 0$:	1 soluzione.

■ **Esercizio 1.91.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x^2 - 1|}}.$$

► *Si determini l'insieme delle primitive di f sull'intervallo* $[0, 1[$.

Si ha

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int -\frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} dx = -\sqrt{1 - x^2} + c, \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

► *Si determini l'insieme delle primitive di f sull'intervallo* $]1, 2]$.

Si ha

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} dx = \sqrt{x^2 - 1} + c, \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

► *Si calcoli l'integrale generalizzato* $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$.

Si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \\
= \lim_{a \to 1^-} \int_0^a f(x)dx + \lim_{b \to 1^+} \int_b^2 f(x)dx = \\
= \lim_{a \to 1^-} \left[-\sqrt{1 - x^2}\right]_0^a + \lim_{b \to 1^+} \left[\sqrt{x^2 - 1}\right]_b^2 = \\
= \lim_{a \to 1^-} \left(-\sqrt{1 - a^2} + 1\right) + \lim_{b \to 1^+} \left(\sqrt{3} - \sqrt{b^2 - 1}\right) = 1 + \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

■ **Esercizio 1.92.** *Si consideri, per $x > 0$, la funzione*

$$f(x) = \int_0^x \left(\int_t^{2t} \log s \, ds \right) dt.$$

▶ *Si determinino:*

- $f'(x) = \int_x^{2x} \log s \, ds = [s \log s - s]_x^{2x} = 2x \log(2x) - x \log x - x$
- $f''(x) = 2 \log(2x) - \log x = \log x + 2 \log 2$

▶ *Si studi la concavità, la convessità e l'esistenza di punti di flesso di f.*

Si ha $f''(x) < 0$ in $]0, 1/4[$, $f''(1/4) = 0$, $f''(x) > 0$ in $]1/4, +\infty[$. Dunque f è concava in $]0, 1/4[$, f è convessa in $]1/4, +\infty[$, il punto $1/4$ è punto di flesso ascendente.

1.2.7 16 settembre 2002

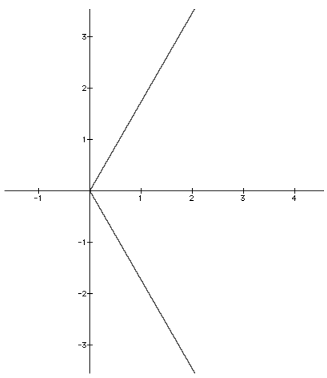
■ **Esercizio 1.93.** *Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E degli $z \in \mathbb{C}$ tali che*

$$(z + \bar{z})|z| = z\bar{z},$$

dove $\bar{z}$ e $|z|$ indicano, rispettivamente, il coniugato e il modulo del numero complesso z.

Risultato

$$E = \left\{ x + iy : (y = \sqrt{3}x) \wedge (x \geq 0) \right\} \cup \left\{ x + iy : (y = -\sqrt{3}x) \wedge (x \geq 0) \right\}$$



Svolgimento
Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$(z+\bar{z})|z| = z\bar{z} \Leftrightarrow 2x\sqrt{x^2+y^2} = x^2+y^2 \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = x^2+y^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 3x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y| = \sqrt{3}x \\ x \geq 0 \end{cases}.$$

■ **Esercizio 1.94.** *Si consideri l'insieme di numeri reali*

$$E = \{r + s : r, s \in \mathbb{Q} \cap \,]0,1[\},$$

dove $\mathbb{Q}$ *indica l'insieme dei numeri razionali.*

Si determinino:

▶ $\inf E =$	$0 \notin E$
▶ $\sup E =$	$2 \notin E$
▶ *l'insieme dei punti di accumulazione di E:*	$[0,2]$
▶ *l'insieme dei punti isolati di E:*	$\emptyset$
▶ *l'insieme dei punti interni di E:*	$\emptyset$

■ **Esercizio 1.95.** *Si calcoli, usando i limiti notevoli,*

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{1/(1-\cos x)}.$$

Risultato

$$e^2$$

Svolgimento
Si ha

$$(1+x^2)^{1/(1-\cos x)} = \exp\left(\frac{\log(1+x^2)}{1-\cos x}\right).$$

Poiché

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\cdot\frac{x^2}{(1-\cos x)} = 2,$$

si conclude che

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{1/(1-\cos x)} = e^2.$$

■ **Esercizio 1.96.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = x^2 \sqrt[3]{1+x}.$$

▶ *Si determinino:*

- *il dominio e i segni di f:*

  $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$; $f(x) > 0$ se $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$; $f(x) < 0$ se $x \in]-\infty,-1[$; $f(-1) = f(0) = 0$

- *i limiti di f:*

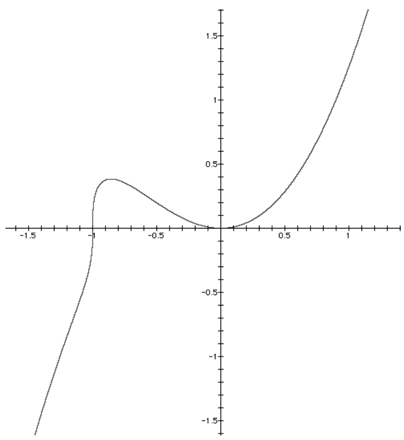
  $$* \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad * \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- $f'(x) =$ $\dfrac{x}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}(7x+6)$ se $x \neq -1$
- $f'(-1) =$ $+\infty$
- *i punti di annullamento e i segni di f':*

  $f'(-6/7) = f'(0) = 0$; $f'(x) > 0$ se $x \in]-\infty,-6/7[\cup]0,+\infty[$; $f'(x) < 0$ se $x \in]-6/7, 0[$

- *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:*

  f è strettamente crescente su $]-\infty,-6/7[$ e su $]0,+\infty[$; f è strettamente decrescente su $]-6/7,0[$; $\inf f = -\infty$; $\sup f = +\infty$; $-6/7$ è punto di massimo relativo, con $f(-6/7) = \frac{36}{49}\sqrt[3]{1/7}$; 0 è punto di minimo relativo, con $f(0) = 0$.



▶ *Si determini il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.*

$t < 0$:	1 soluzione,
$t = 0$:	2 soluzioni,
$0 < t < \frac{36}{49}\sqrt[3]{1/7}$:	3 soluzioni,
$t = \frac{36}{49}\sqrt[3]{1/7}$:	2 soluzioni,
$t > \frac{36}{49}\sqrt[3]{1/7}$:	1 soluzione.

■ **Esercizio 1.97.** *Si determini una primitiva F della funzione*

$$f(x) = \int_1^x \log t\, dt.$$

Risultato

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{3}{4}x^2 + x$$

Svolgimento
Si ha

$$f(x) = \int_1^x \log t\ dt = \big[t \log t\big]_1^x - \int_1^x 1\ dt = x \log x - x + 1$$

e quindi

$$\int f(x)\ dx = \int (x \log x - x + 1)\ dx =$$
$$\frac{1}{2}x^2 \log x - \int \frac{1}{2}x\ dx - \frac{1}{2}x^2 + x = \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{3}{4}x^2 + x + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$.

■ **Esercizio 1.98.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_{-x}^x \cos(t^2)\, dt.$$

▶ *Si provi che f è dispari.*

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(-x) = \int_x^{-x} \cos(t^2)\, dt = -\int_{-x}^x \cos(t^2)\, dt = -f(x).$$

▶ *Si determinino:*

- $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\int_0^x \cos(t^2)\,dt - \int_0^{-x} \cos(t^2)\,dt\right) = 2\cos(x^2)$
- $f''(x) = -4x\sin(x^2)$

▶ *Si determinino i punti di flesso di f nell'intervallo* $\left[-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}\right]$.

Poiché $\sin(x^2) > 0$ se $x \in \left[-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}\right] \setminus \{0\}$, si ha $f''(x) > 0$ se $x \in \left[-\sqrt{\pi/2}, 0\right[$, $f''(x) < 0$ se $x \in \left]0, \sqrt{\pi/2}\right]$ e, in fine, $f''(0) = 0$. Si conclude allora che 0 è punto di flesso discendente.

2

Anno Accademico 2002 - 2003

2.1 Prove intermedie

2.1.1 25 ottobre 2002 — Tema A

■ **Esercizio 2.1.** *Si consideri l'insieme*

$$E = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

▶ *Si determinino, giustificando le risposte,* $\inf E$ *e* $\sup E$.

Risulta $\inf E = 0$, in quanto, per ogni $m, n \in \mathbb{N}^+$, si ha $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 0$ e, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $m, n \in \mathbb{N}^+$ tali che $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \varepsilon$ (infatti, basta prendere $m = n$ e $n > \frac{2}{\varepsilon}$).

Risulta $\sup E = \max E = 2$, in quanto, per ogni $m, n \in \mathbb{N}^+$, si ha $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq 2$ ed esistono $m, n \in \mathbb{N}^+$ tali che $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2$ (infatti, basta prendere $m = n = 1$).

▶ *Si dica se esistono* $\min E$ *e* $\max E$.

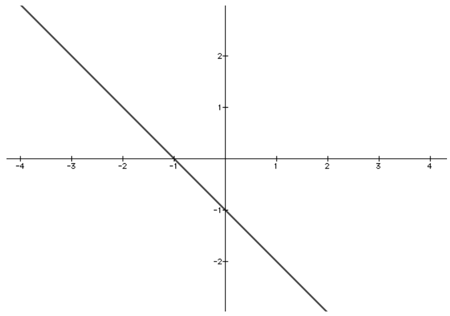
Esiste $\max E = 2$. Non esiste $\min E$, poiché $0 \notin E$.

■ **Esercizio 2.2.** *Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E degli* $z \in \mathbb{C}$ *tali che*

$$\frac{z+1}{z+i} \in \mathbb{R}.$$

Risultato

$$E = \{x + iy \in \mathbb{C} : x + y + 1 = 0\} \setminus \{-i\}$$



Svolgimento
Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha, per $z \neq -i$,

$$\frac{z+1}{z+i} = \frac{z+1}{z+i} \cdot \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}-i} = \frac{z\bar{z} - iz + \bar{z} - i}{|z+i|^2} = \frac{x^2 + y^2 - ix + y + x - iy - i}{|z+i|^2} =$$
$$= \frac{x^2 + y^2 + x + y}{|z+i|^2} + i\frac{-x-y-1}{|z+i|^2}.$$

Quindi, per $z \neq -i$, risulta

$$\frac{z+1}{z+i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x + y + 1 = 0) \wedge ((x, y) \neq (0, -1)).$$

■ **Esercizio 2.3.** *Sia*

$$f(x) = \log_{\frac{1}{e}}\left(1 - \sqrt{1-x}\right).$$

Si determinino
▶ *il dominio di f:*

dom $f =]0, 1]$; infatti,

$$x \in \operatorname{dom} f \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 1 - \sqrt{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 1 - x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

► *i segni di f:*

se $x \in \operatorname{dom} f$, si ha

$\log_{\frac{1}{e}}\left(1-\sqrt{1-x}\right) > 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{1-x} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} > 0 \Leftrightarrow x < 1;$

inoltre si ha $f(1) = 0$;

► *l'eventuale crescenza o decrescenza di f:*

f è strettamente decrescente, infatti, se $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$, si ha

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \Rightarrow 1-\sqrt{1-x_1} < 1-\sqrt{1-x_2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_{\frac{1}{e}}\left(1-\sqrt{1-x_1}\right) > \log_{\frac{1}{e}}\left(1-\sqrt{1-x_2}\right);$$

► $f^{-1}(\{2\})$:

se $x \in \operatorname{dom} f$, si ha

$$f(x) = \log_{\frac{1}{e}}\left(1-\sqrt{1-x}\right) = 2 \Leftrightarrow 1-\sqrt{1-x} = e^{-2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 1-e^{-2} \Leftrightarrow 1-x = (1-e^{-2})^2 \Leftrightarrow x = 1-(1-e^{-2})^2;$$

► $f^{-1}(\{-2\})$:

poiché $f(x) \geq 0$ in $\operatorname{dom} f$, si ha $f^{-1}(\{-2\}) = \emptyset$.

2.1.2 25 ottobre 2002 — Tema B

■ **Esercizio 2.4.** *Si consideri l'insieme*

$$E = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}^+\right\}.$$

► *Si determinino, giustificando le risposte,* $\inf E$ *e* $\sup E$.

► *Si dica se esistono* $\min E$ *e* $\max E$.

■ **Esercizio 2.5.** *Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E degli $z \in \mathbb{C}$ tali che*

$$\frac{z-1}{z+i} \in \mathbb{R}.$$

■ **Esercizio 2.6.** *Sia*

$$f(x) = \log_{\frac{1}{e}} \left(1 - \sqrt{1+x}\right).$$

Si determinino

▶ *il dominio di f:*

▶ *i segni di f:*

▶ *l'eventuale crescenza o decrescenza di f:*

▶ $f^{-1}(\{2\})$:

▶ $f^{-1}(\{-2\})$:

2.1.3 25 ottobre 2002 — Tema C

■ **Esercizio 2.7.** *Si consideri l'insieme*

$$E = \left\{ \frac{1}{m+n} : m, n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

▶ *Si determinino, giustificando le risposte,* $\inf E$ *e* $\sup E$*.*

▶ *Si dica se esistono* $\min E$ *e* $\max E$*.*

■ **Esercizio 2.8.** *Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E degli $z \in \mathbb{C}$ tali che*

$$\frac{z+1}{z-i} \in \mathbb{R}.$$

■ **Esercizio 2.9.** *Sia*

$$f(x) = \log\left(2 - \sqrt{1-x}\right).$$

Si determinino

▶ *il dominio di f:*

▶ *i segni di f:*

▶ *l'eventuale crescenza o decrescenza di f:*

▶ $f^{-1}(\{-2\})$:

▶ $f^{-1}(\{2\})$:

2.1.4 25 ottobre 2002 — Tema D

■ **Esercizio 2.10.** *Si consideri l'insieme*

$$E = \left\{ \frac{1}{m \cdot n} : m, n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

▶ *Si determinino, giustificando le risposte,* $\inf E$ *e* $\sup E$.

▶ *Si dica se esistono* $\min E$ *e* $\max E$.

■ **Esercizio 2.11.** *Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E degli $z \in \mathbb{C}$ tali che*

$$\frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R}.$$

■ **Esercizio 2.12.** *Sia*

$$f(x) = \log\left(2 - \sqrt{1+x}\right).$$

Si determinino

▶ *il dominio di f:*

► *i segni di f:*

► *l'eventuale crescenza o decrescenza di f:*

► $f^{-1}(\{-2\})$:

► $f^{-1}(\{2\})$:

2.1.5 22 novembre 2002 — Tema A

■ **Esercizio 2.13.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 2\cos x, & \text{se } x \leq 0, \\ x - 3^{-x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

► *Si calcolino i limiti di f.*

$*\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad *\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$

$*\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$ $\qquad *\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

► *Si verifichi che f è continua su $\mathbb{R}$.*

La funzione f è continua in ogni punto $x \neq 0$, perché è combinazione lineare di funzioni continue. Si deve dunque verificare la continuità di f in 0. Poiché

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x),$$

si conclude che f è continua in 0.

► *Si provi che f si annulla in almeno due punti.*

Poiché $f :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ è continua, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $f(0) = -1$, si conclude, per il teoremi della permanenza del segno e dell'esistenza degli zeri, che esiste $x_1 < 0$ tale che $f(x_1) = 0$.
Poiché $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è continua, $f(0) = -1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si conclude, per il teoremi della permanenza del segno e dell'esistenza degli zeri, che esiste $x_2 > 0$ tale che $f(x_2) = 0$.

■ **Esercizio 2.14.** *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(1-\cos(2x))}{x^2}.$$

Risultato

$$2$$

Svolgimento
Si ha

$$\frac{\sin(1-\cos(2x))}{x^2} = \frac{\sin(1-\cos(2x))}{1-\cos(2x)} \cdot \frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2} \cdot 4 \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

■ **Esercizio 2.15.** *Sia* $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *la funzione (biiettiva) definita da*

$$f(x) = x \cdot (x+1)^{3x}.$$

▶ *Si calcoli* $f'(x)$.

Si ha

$$f'(x) = (x+1)^{3x} + x \cdot (x+1)^{3x} \cdot \left(3\log(x+1) + \frac{3x}{x+1}\right) (>0).$$

▶ *Si verifichi che* $f^{-1}(8) = 1$.

Si ha $f^{-1}(8) = 1$, dato che è $f(1) = 8$.

▶ *Si calcoli* $(f^{-1})'(8)$.

Poiché f è strettamente crescente su $[0,+\infty[$ e

$$f'(1) = 8 + 8 \cdot \left(3\log 2 + \frac{3}{2}\right),$$

si ha, per il teorema di derivazione della funzione inversa,

$$(f^{-1})'(8) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{20 + 24\log 2}.$$

2.1.6 22 novembre 2002 — Tema B

■ **Esercizio 2.16.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + x, & \textit{se } x \leq 0 \\ 2\cos x - 3^x, & \textit{se } x > 0. \end{cases}$$

▶ *Si calcolino i limiti di* f.

$$* \lim_{x \to -\infty} f(x) = \qquad * \lim_{x \to 0^-} f(x) =$$
$$* \lim_{x \to 0^+} f(x) = \qquad * \lim_{x \to +\infty} f(x) =$$

▶ *Si verifichi che* f *è continua su* $\mathbb{R}$.

▶ *Si provi che* f *si annulla in almeno due punti.*

■ **Esercizio 2.17.** *Si calcoli*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 - \sin(2x))}{x}.$$

■ **Esercizio 2.18.** *Sia* $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *la funzione (biiettiva) definita da*

$$f(x) = x \cdot (2x + 1)^x.$$

▶ *Si calcoli* $f'(x)$.

▶ *Si verifichi che* $f^{-1}(3) = 1$.

▶ *Si calcoli* $(f^{-1})'(3)$.

2.1.7 22 novembre 2002 — Tema C

■ **Esercizio 2.19.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x) = \begin{cases} 3^{-x} - 2\cos x, & \textit{se } x \le 0 \\ x - 2^{-x}, & \textit{se } x > 0. \end{cases}$$

▶ *Si calcolino i limiti di f.*

$$* \lim_{x\to-\infty} f(x) = \qquad * \lim_{x\to0^-} f(x) =$$
$$* \lim_{x\to0^+} f(x) = \qquad * \lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

▶ *Si verifichi che f è continua su $\mathbb{R}$.*

▶ *Si provi che f si annulla in almeno due punti.*

■ **Esercizio 2.20.** *Si calcoli*

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{2\tan(3x)} - 1}{x}.$$

■ **Esercizio 2.21.** *Sia $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ la funzione (biiettiva) definita da*

$$f(x) = x \cdot (3x+1)^x.$$

▶ *Si calcoli $f'(x)$.*

▶ *Si verifichi che $f^{-1}(4) = 1$.*

▶ *Si calcoli $(f^{-1})'(4)$.*

2.1.8 22 novembre 2002 — Tema D

■ **Esercizio 2.22.** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x) = \begin{cases} 3^x + x, & \text{se } x \leq 0 \\ 2\cos x - 2^x, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

▶ *Si calcolino i limiti di* f.

$$* \lim_{x\to-\infty} f(x) = \qquad * \lim_{x\to0^-} f(x) =$$
$$* \lim_{x\to0^+} f(x) = \qquad * \lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

▶ *Si verifichi che* f *è continua su* $\mathbb{R}$.

▶ *Si provi che* f *si annulla in almeno due punti.*

■ **Esercizio 2.23.** *Si calcoli*

$$\lim_{x\to0} \frac{\cos(2\sin x) - 1}{x^2}.$$

■ **Esercizio 2.24.** *Sia* $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *la funzione (biiettiva) definita da*

$$f(x) = x \cdot (x+1)^{2x}.$$

▶ *Si calcoli* $f'(x)$.

▶ *Si verifichi che* $f^{-1}(4) = 1$.

▶ *Si calcoli* $(f^{-1})'(4)$.

2.1.9 20 DICEMBRE 2002 — TEMA *A*

■ **Esercizio 2.25.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_{x+1}^{2x} \frac{1}{4+t^{40}}\,dt.$$

Si determino:

▶ $f(1) \quad = \quad 0$

▶ $f'(x) \quad = \quad \dfrac{2}{4+(2x)^{40}} - \dfrac{1}{4+(x+1)^{40}}$

▶ $f'(1) \quad = \quad \dfrac{1}{4+2^{40}}$

▶ $\operatorname{ord}_1 f \quad = \quad 1$

(per il lemma di Peano, essendo $f(1) = 0$ e $f'(1) \neq 0$).

■ **Esercizio 2.26.** *Si calcoli, sull'intervallo* $]0, +\infty[$, *una primitiva* F *della funzione*

$$f(x) = 2 - 2\cos\sqrt{x} + \sqrt{x}\sin\sqrt{x}.$$

Risultato

$$F(x) = 2x\,(1 - \cos\sqrt{x})$$

Svolgimento
Si ha, integrando per parti,

$$\int \cos\sqrt{x}\,dx = x\cos\sqrt{x} + \int \frac{x}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\,dx$$

e quindi

$$\begin{gathered}\int (2 - 2\cos\sqrt{x} + \sqrt{x}\sin\sqrt{x})\,dx = \\ = 2x - 2x\cos\sqrt{x} - \int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx + \int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx = \\ = 2x - 2x\cos\sqrt{x} + c,\end{gathered}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

■ **Esercizio 2.27.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = x\sqrt[3]{x+1}.$$

► *Si determinino:*

- $\operatorname{dom} f = \quad \mathbb{R}$

- *i punti di annullamento e i segni di f:*

  $f(-1) = f(0) = 0$; $f(x) > 0$ se $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$; $f(x) < 0$ se $x \in]-1, 0[$;

- *i limiti di f:*

  $$* \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad * \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- $f'(x) \quad = \quad \dfrac{4x+3}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$, se $x \neq -1$;

- $f'(-1) = \quad -\infty$

- *i punti di annullamento e i segni di f':*

  $f'(-3/4) = 0$; $f'(x) < 0$ se $x \in]-\infty, -3/4[$; $f'(x) > 0$ se $x \in]-3/4, +\infty[$;

- *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:*

  f è strettamente decrescente su $]-\infty, -3/4[$; f è strettamente crescente su $]-3/4, +\infty[$; $\min f = f(-3/4) = -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$; $\sup f = +\infty$;

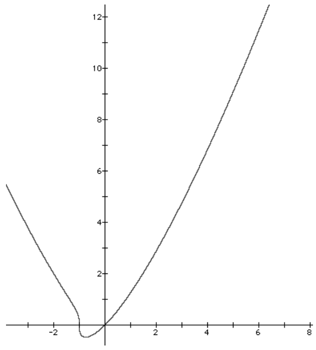
- $f''(x) = \quad \dfrac{2}{9}\dfrac{2x+3}{\sqrt[3]{(x+1)^5}}$, se $x \neq -1$

- *i punti di annullamento e i segni di f'':*

  $f''(-3/2) = 0$; $f''(x) < 0$ se $x \in]-3/2, -1[$; $f''(x) > 0$ se $x \in]-\infty, -3/2[\cup]-1, +\infty[$;

- *la concavità, la convessità e i punti di flesso di f:*

  f è concava su $]-3/2, -1[$; f è convessa su $]-\infty, -3/2[$ e su $]-1, +\infty[$; $-3/2$ è punto di flesso discendente.



▶ *Si determini il numero delle soluzioni* $x \in \operatorname{dom} f$ *dell'equazione* $f(x) = t$, *al variare di* $t \in \mathbb{R}$.

$t < f(-3/4)$: 0 soluzioni,
$t = f(-3/4)$: 1 soluzione,
$t > f(-3/4)$: 2 soluzioni.

2.1.10 20 DICEMBRE 2002 — TEMA B

■ **Esercizio 2.28.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_{x-2}^{3x} \frac{1}{3+t^{50}}\,dt.$$

Si determino:

▶ $f(-1) \;=$

▶ $f'(x) \;=$

▶ $f'(-1) \;=$

▶ $\operatorname{ord}_{-1} f =$

■ **Esercizio 2.29.** *Si calcoli, sull'intervallo* $]0, +\infty[$, *una primitiva* F *della funzione*

$$f(x) = 2 + 2\sin\sqrt{x} + \sqrt{x}\cos\sqrt{x}.$$

■ **Esercizio 2.30.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = (x+1)\sqrt[3]{x}.$$

▶ *Si determinino:*

- $\operatorname{dom} f =$
- *i punti di annullamento e i segni di f:*
- *i limiti di f:*

$$* \lim_{x\to-\infty} f(x) = \qquad\qquad * \lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

- $f'(x) =$
- $f'(0) =$
- *i punti di annullamento e i segni di f':*
- *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:*
- $f''(x) =$
- *i punti di annullamento e i segni di f'':*
- *la concavità, la convessità e i punti di flesso di f:*

▶ *Si determini il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.*

2.1.11 20 dicembre 2002 — Tema C

■ **Esercizio 2.31.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_{x-1}^{2x} \frac{1}{2+t^{60}}\,dt.$$

Si determino

▶ $f(-1) \quad =$

▶ $f'(x) \quad =$

▶ $f'(-1) \quad =$

▶ $\operatorname{ord}_{-1} f \quad =$

■ **Esercizio 2.32.** *Si calcoli, sull'intervallo* $]0,+\infty[$, *una primitiva* F *della funzione*

$$f(x) = 2 + 2\cos\sqrt{x} - \sqrt{x}\sin\sqrt{x}.$$

■ **Esercizio 2.33.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = x\sqrt[3]{1-x}.$$

▶ *Si determinino:*

- $\operatorname{dom} f =$
- *i punti di annullamento e i segni di* f*:*
- *i limiti di* f*:*

$$* \lim_{x\to-\infty} f(x) = \qquad\qquad * \lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

- $f'(x) =$
- $f'(1) =$
- *i punti di annullamento e i segni di* f'*:*
- *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di* f*:*
- $f''(x) =$
- *i punti di annullamento e i segni di* f''*:*
- *la concavità, la convessità e i punti di flesso di* f*:*

▶ *Si determini il numero delle soluzioni* $x \in \operatorname{dom} f$ *dell'equazione* $f(x) = t$*, al variare di* $t \in \mathbb{R}$.

2.1.12 20 dicembre 2002 — Tema D

■ **Esercizio 2.34.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_{x+2}^{3x} \frac{1}{1+t^{70}}\, dt.$$

Si determino

▶ $f(1) \quad =$

▶ $f'(x) \quad =$

▶ $f'(1) \quad =$

▶ $\operatorname{ord}_1 f \quad =$

■ **Esercizio 2.35.** *Si calcoli, sull'intervallo* $]0, +\infty[$, *una primitiva* F *della funzione*

$$f(x) = 2 - 2\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}.$$

■ **Esercizio 2.36.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = (1-x)\sqrt[3]{x}.$$

▶ *Si determinino:*

- $\operatorname{dom} f =$
- *i punti di annullamento e i segni di* f*:*
- *i limiti di* f*:*

$$* \lim_{x\to-\infty} f(x) = \qquad\qquad * \lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

- $f'(x) =$
- $f'(0) =$
- *i punti di annullamento e i segni di* f'*:*
- *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di* f*:*
- $f''(x) =$
- *i punti di annullamento e i segni di* f''*:*
- *la concavità, la convessità e i punti di flesso di* f*:*

▶ *Si determini il numero delle soluzioni* $x \in \operatorname{dom} f$ *dell'equazione* $f(x) = t$, *al variare di* $t \in \mathbb{R}$.

2.2 Temi d'esame

2.2.1 7 gennaio 2003

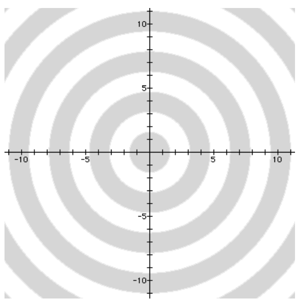
■ **Esercizio 2.37.** *Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E dei numeri complessi z tali che*

$$\tan(|z|) > 0,$$

dove $|z|$ indica il modulo del numero complesso z.

Risultato

$$E = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left\{ x + iy \in \mathbb{C} : k^2\pi^2 < x^2 + y^2 < \pi^2 \left(\frac{1}{2} + k \right)^2 \right\}$$



Svolgimento
Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\tan(|z|) > 0$$

se e solo se, per qualche $k \in \mathbb{N}$,

$$k\pi < |z| < \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow k\pi < \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k^2\pi^2 < x^2 + y^2 < \pi^2 \left(\frac{1}{2} + k \right)^2 .$$

■ **Esercizio 2.38.** *Si consideri l'insieme di numeri reali*

$$E =]-1,1[\, \cup \mathbb{N},$$

dove $\mathbb{N}$ *indica l'insieme dei numeri naturali.*

Si determinino:

▶ $\inf E =$ $-1 \notin E$

▶ $\sup E =$ $+\infty$

▶ *l'insieme dei punti di accumulazione di E:* $[-1,1] \cup \{+\infty\}$

▶ *l'insieme dei punti isolati di E:* $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

▶ *l'insieme dei punti interni di E:* $]-1,1[$.

■ **Esercizio 2.39.** *Si calcoli, utilizzando i limiti notevoli,*

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \left(x - \sqrt[3]{1+x^3}\right).$$

Risultato

$$-\frac{1}{3}$$

Svolgimento
Si ha

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \left(x - \sqrt[3]{1+x^3}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\sqrt[3]{1+1/x^3}}{1/x^3} = -\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+t}-1}{t} = -\frac{1}{3},$$

avendo posto $t = 1/x^3$ e ricordando il limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha,$$

per ogni fissato $\alpha \in \mathbb{R}$.

■ **Esercizio 2.40.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha 3^x + 5\beta, & \text{se } x < 1, \\ \alpha x + \beta x^2 - 12 \log 3, & \text{se } x \geq 1, \end{cases}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

▶ *Si determinino* α, β *in modo che* f *sia continua su* $\mathbb{R}$.

Poiché f è continua in ogni punto $x_0 \neq 1$, basta imporre che f sia continua in $x_0 = 1$; ciò accade se e solo se

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\alpha + 5\beta = \alpha + \beta - 12 \log 3 \Leftrightarrow \alpha + 2\beta = -6 \log 3.$$

▶ *Si determinino* α, β *in modo che* f *sia di classe* C^1 *su* $\mathbb{R}$.

Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha 3^x \log 3, & \text{se } x < 1, \\ \alpha + 2\beta x, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Poiché f' è continua in ogni punto $x_0 \neq 1$, basta imporre che f sia derivabile in $x_0 = 1$, con derivata f' continua; ciò accade, per il teorema sul limite della derivata, se e solo se f è continua in $x_0 = 1$ e

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x),$$

cioè se e solo se

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = -6 \log 3 \\ 3(\log 3)\alpha = \alpha + 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 1 - 3 \log 3 \end{cases}.$$

▶ *Si dica se esistono* α, β *tali che* f *sia di classe* C^2 *su* $\mathbb{R}$.

Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \alpha 3^x (\log 3)^2, & \text{se } x < 1, \\ 2\beta, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Poiché f'' è continua in ogni punto $x_0 \neq 1$, basta imporre che f' sia derivabile in $x_0 = 1$, con derivata f'' continua; ciò accade, per il teorema sul limite della derivata, se e solo se f' è continua in $x_0 = 1$ e

$$\lim_{x\to 1^-} f''(x) = \lim_{x\to 1^+} f''(x),$$

cioè se e solo se

$$\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 1 - 3\log 3 \\ 3(\log 3)^2\alpha = 2\beta, \end{cases}$$

il che è impossibile, poiché l'equazione $6t^2 - 6t + 2 = 0$ non ha $\log 3$ come soluzione.

■ **Esercizio 2.41.** *Si determini, su $\mathbb{R}$, una primitiva F della funzione*

$$f(x) = x \cdot \frac{1 + \arctan(x^2)}{1 + x^4}.$$

Risultato

$$F(x) = \frac{1}{2}\arctan(x^2) + \frac{1}{4}(\arctan(x^2))^2$$

Svolgimento
Si ha

$$\begin{aligned} \int x \cdot \frac{1+\arctan(x^2)}{1+x^4}\,dx &= \left(\frac{1}{2}\int \frac{1+\arctan t}{1+t^2}dt\right)_{t=x^2} = \\ = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1+t^2}dt\right)_{t=x^2} &+ \frac{1}{4}\left(\int \frac{2\arctan t}{1+t^2}dt\right)_{t=x^2} = \\ &= \frac{1}{2}\arctan(x^2) + \frac{1}{4}(\arctan(x^2))^2 + c, \end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

■ **Esercizio 2.42.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = x + \int_0^x |t|\, e^{-t}\, dt.$$

Si determinino, giustificando le risposte:

▶ *il dominio di f:*

dom $f = \mathbb{R}$, essendo la funzione $|t|\, e^{-t}$ continua e quindi localmente integrabile su $\mathbb{R}$;

▶ *i punti di annullamento e i segni di f:*

$f(x) < 0$ se $x < 0$, $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ se $x > 0$; infatti, posto $f(x) = x + g(x)$, si ha $g(x) < 0$ se $x < 0$, $g(x) = 0$ se $x = 0$, $g(x) > 0$ se $x > 0$ (in quanto $|t|\, e^{-t} > 0$ se $t \neq 0$);

▶ *i limiti di f:*

$$* \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad * \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

tenendo conto dei segni di $\int_0^x |t|\, e^{-t}\, dt$;

▶ *la derivata prima di f:*

per il teorema fondamentale del calcolo, si ha

$$f'(x) = 1 + |x|\, e^{-x},$$

▶ *i punti di annullamento e i segni di f':*

$f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

▶ *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:*

f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$;

▶ *la derivata seconda di f:*

$$f''(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-x}, & \text{se } x < 0 \\ (1-x)e^{-x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

▶ *i punti di annullamento e i segni di f'':*

$f''(1) = 0$, $f''(x) < 0$ se $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $f''(x) > 0$ se $x \in]0, 1[$;

▶ *la concavità, la convessità e i punti di flesso di f:*

f è concava su $]-\infty, 0[$ e su $]1, +\infty[$, f è convessa su $]0, 1[$, 0 è punto di flesso ascendente e 1 è punto di flesso discendente.

2.2.2 20 gennaio 2003

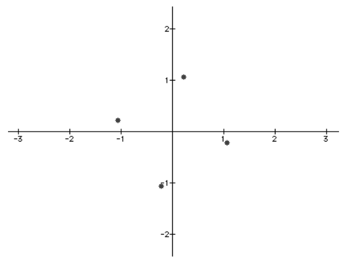
■ **Esercizio 2.43.** *Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E delle soluzioni dell'equazione*

$$(\bar{z})^4 = 1 + i,$$

dove $\bar{z}$ indica il coniugato del numero complesso z.

Risultato

$$E = \left\{ \left[\sqrt[8]{2}, -\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \right] : k \in \{0, 1, 2, 3\} \right\}$$



Svolgimento

Rappresentiamo i numeri complessi in forma polare: $z = [\rho, \vartheta]$, con $\rho \geq 0$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$, e $1 + i = [\sqrt{2}, \pi/4]$. Osservando che $\bar{z} = [\rho, -\vartheta]$, si ottiene, per la formula di De Moivre,

$$(\bar{z})^4 = 1 + i \Leftrightarrow [\rho, -\vartheta]^4 = [\sqrt{2}, \pi/4] \Leftrightarrow [\rho^4, -4\vartheta] = [\sqrt{2}, \pi/4] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^4 = \sqrt{2} \\ -4\vartheta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[8]{2} \\ \vartheta = -\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}.$$

Le soluzioni distinte sono dunque

$$z_k = \left[\sqrt[8]{2}, -\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \right], \quad \text{con } k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

■ **Esercizio 2.44.** *Si consideri l'insieme di numeri reali*

$$E = \left\{ \frac{n}{1 + n^2} : n \in \mathbb{N}^+ \right\},$$

con $\mathbb{N}^+ = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$.

▶ *Si provi che la successione* $\left(\dfrac{n}{1+n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^+}$ *è strettamente decrescente.*

Si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$,

$$\frac{n}{1+n^2} > \frac{n+1}{1+(n+1)^2} \Leftrightarrow n\left(1+(n+1)^2\right) > (n+1)\left(1+n^2\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n^3+2n^2+2n > n^3+n^2+n+1 \Leftrightarrow n^2+n>1.$$

L'ultima disuguaglianza è ovviamente vera per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

▶ *Si determinino:*

- $\inf E =$ $\qquad 0 \notin E$
- $\sup E =$ $\qquad \frac{1}{2}\ (=\max E)$
- *l'insieme dei punti di accumulazione di E:* $\qquad \{0\}$
- *l'insieme dei punti isolati di E:* $\qquad E$.

■ **Esercizio 2.45.** *Si calcoli, usando i limiti notevoli,*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot(1-x^x)}{(1-\cos x)\cdot \log x}.$$

Risultato

$$-2$$

Svolgimento
Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot(1-x^x)}{(1-\cos x)\cdot \log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{1-\cos x}\cdot\frac{1-e^{x\log x}}{x\cdot\log x} = 2\cdot(-1) = -2.$$

■ **Esercizio 2.46.** *Si consideri l'equazione*

$$2e^{-|x|} = x.$$

▶ *Si provi che tale equazione ha almeno una soluzione.*

Posto $f(x) = 2e^{-|x|} - x$, si ha che f è continua su $\mathbb{R}$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Per il teorema della permanenza del segno e per il teorema di esistenza degli zeri, si ottiene l'esistenza di almeno un punto x_0 tale che $f(x_0) = 0$.

▶ *Si provi che la soluzione è unica.*

Essendo $f(x) > 0$ per $x \le 0$, risulta $x_0 > 0$. Per $x > 0$, essendo $f(x) = 2e^{-x} - x$ somma di due funzioni strettamente decrescenti, f è strettamente decrescente in $]0, +\infty[$. Si conclude allora che x_0 è unico.

■ **Esercizio 2.47.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot (1 - \log |x|), & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

▶ *Si provi che f è dispari.*

Si ha, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$f(-x) = (-x) \cdot (1 - \log|-x|) = -x \cdot (1 - \log|x|) = -f(x).$$

▶ *Si provi che f è continua in* 0.

Si ha $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

▶ *Si determinino:*

- *i punti di annullamento e i segni di f:*

$f(x) > 0$ se $x \in]-\infty, -e[\cup]0, e[$; $f(x) < 0$ se $x \in]-e, 0[\cup]e, +\infty[$; $f(-e) = f(0) = f(e) = 0$;

- *i limiti di f:*

  $* \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $* \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

- $f'(x) = \qquad -\log|x|$, se $x \neq 0$;
- $f'(0) = \qquad +\infty$
- *i punti di annullamento e i segni di f':*

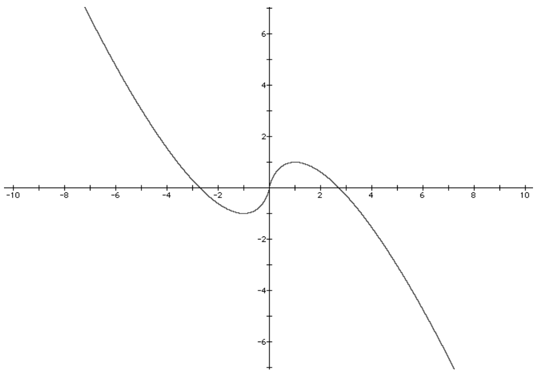
  $f'(-1) = f'(1) = 0$; $f'(x) < 0$ se $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$; $f'(x) > 0$ se $x \in]-1, 1[$;

- *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:*

  f è strettamente decrescente su $]-\infty, -1[$ e su $]1, +\infty[$; f è strettamente crescente su $]-1, 1[$; $\inf f = -\infty$ e $\sup f = +\infty$; -1 è punto di minimo relativo, con $f(-1) = -1$ e 1 è punto di massimo relativo, con $f(1) = 1$;

- $f''(x) = \qquad -\dfrac{1}{x}, \quad$ se $x \neq 0$;
- *la concavità e la convessità di f:*

  poiché $f''(x) > 0$ se $x < 0$ e $f''(x) < 0$ se $x > 0$, si conclude che f è convessa su $]-\infty, 0[$ ed è concava su $]0, +\infty[$.



■ **Esercizio 2.48.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_0^x \left(\int_t^{2t} \frac{1}{1+s^2}\, ds \right) dt.$$

▶ *Si determini un'espressione esplicita di f.*

Si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \left(\int_t^{2t} \frac{1}{1+s^2}\, ds \right) dt = \int_0^x \left([\arctan s]_t^{2t} \right) dt = \\ &= \int_0^x (\arctan(2t) - \arctan t)\, dt = \\ &= [t\,(\arctan(2t) - \arctan t)]_0^x - \int_0^x \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{8t}{1+4t^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{1+t^2} \right) dt = \\ &= x\, \arctan(2x) - x\, \arctan x - \left[\frac{1}{4}\, \log(1+4t^2) - \frac{1}{2}\, \log(1+t^2) \right]_0^x = \\ &= x\, \arctan(2x) - x\, \arctan x - \frac{1}{4}\, \log(1+4x^2) + \frac{1}{2}\, \log(1+x^2). \end{aligned}$$

▶ *Si provi che f ha due punti di flesso.*

Si ha

$$f'(x) = \arctan(2x) - \arctan x, \quad f''(x) = \frac{1-2x^2}{(1+x^2)(1+4x^2)}.$$

Essendo $f''(x) > 0$ in $\left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, $f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$, $f''(x) < 0$ in $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$, si conclude che il punto $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ è di flesso ascendente e che il punto $\frac{1}{\sqrt{2}}$ è di flesso discendente.

2.2.3 10 febbraio 2003

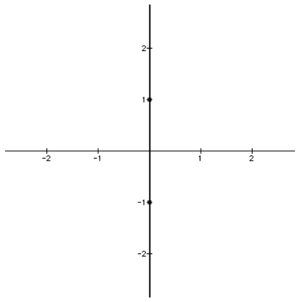
■ **Esercizio 2.49.** *Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E delle soluzioni dell'equazione*

$$\frac{z^2 + |z|^2}{z^4 - 1} = 0,$$

dove $|z|$ indica il modulo del numero complesso z.

Risultato

$$E = \{x + iy \in \mathbb{C} : (x = 0) \wedge (y \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\})\}$$



Svolgimento
Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\frac{z^2 + |z|^2}{z^4 - 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + |z|^2 = 0 \\ z^4 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z(z + \bar{z}) = 0 \\ z^4 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z = 0) \vee \begin{cases} \Re z = 0 \\ z^4 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \neq \pm 1 \end{cases}.$$

■ **Esercizio 2.50.** *Si consideri l'insieme di numeri reali*

$$E = [0, 1] \setminus \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

dove $\mathbb{N}^+ = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$.

Si determinino:

- ▶ $\inf E =$ $0 \ (= \min E)$
- ▶ $\sup E =$ $1 \notin E$
- ▶ *l'insieme dei punti di accumulazione di E:* $[0, 1]$
- ▶ *l'insieme dei punti isolati di E:* $\emptyset$
- ▶ *l'insieme dei punti interni di E:* $E \setminus \{0\}$

■ **Esercizio 2.51.** *Si calcoli, utilizzando i limiti notevoli,*

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - \cos(\log x)}{(x - 1)^2}.$$

Risultato

$$\frac{1}{2}$$

Svolgimento
Si ha, posto $t = \log x$,

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(\log x)}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{(e^t-1)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} \cdot \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1.$$

■ **Esercizio 2.52.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) - x.$$

▶ *Si determini il dominio di f.*

$$\operatorname{dom} f = [0, +\infty[$$

▶ *Si provi, senza far uso della derivata, che f è strettamente decrescente sul suo dominio.*

Per ogni $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$, si ha

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 1+\sqrt{x_1} < 1+\sqrt{x_2} \Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{x_1}} > \frac{1}{1+\sqrt{x_2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log\left(\frac{1}{1+\sqrt{x_1}}\right) > \log\left(\frac{1}{1+\sqrt{x_2}}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log\left(\frac{1}{1+\sqrt{x_1}}\right) - x_1 > \log\left(\frac{1}{1+\sqrt{x_2}}\right) - x_2.$$

▶ *Si determinino:*

- $\inf f = \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- $\sup f = \quad f(0) = 0 = \max f$

▶ *Si determini, motivando la risposta, l'insieme immagine di f.*

Poiché f è continua sull'intervallo $[0,+\infty[$, per il teorema di connessione, l'immagine di f è l'intervallo $]\inf f, \max f] =]-\infty, 0]$.

▶ *Si calcoli nel punto $y = \log(\frac{1}{2}) - 1$ la derivata della funzione inversa di f:*

Essendo $f(1) = \log(1/2) - 1$ si ha

$$\left(f^{-1}\right)'\left(\log\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{4}{5},$$

essendo, per $x > 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1.$$

■ **Esercizio 2.53.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = x \cdot \left(\arccos x - \frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{1-x^2}.$$

Si determinino:

▶ *il dominio di f:* $\quad \operatorname{dom} f = [-1,1]$;

▶ *la derivata prima di f:*

$$f'(x) = \arccos x - \frac{\pi}{2}, \quad \text{se } x \in]-1,1[,$$
$$f'(-1) = \frac{\pi}{2}, \qquad f'(1) = -\frac{\pi}{2};$$

▶ *i punti di annullamento e i segni di f':*

$f'(x) > 0$ se $x \in [-1,0[$, $f'(0) = 0$, $f'(x) < 0$ se $x \in]0,1]$;

▶ *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:*

f è strettamente crescente su $[-1,0[$, f è strettamente decrescente su $]0,1]$, $\max f = f(0) = -1$, $\min f = f(-1) = f(1) = -\frac{\pi}{2}$;

▶ *i punti di annullamento e i segni di f:*

$f(x) < 0$ su $[-1,1]$;

▶ *la derivata seconda di f:*

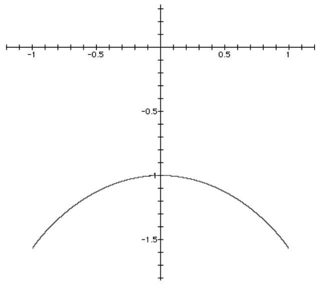
$$f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{se } x \in]-1,1[;$$

▶ *i punti di annullamento e i segni di f'':*

$f''(x) < 0$ su $]-1,1[$;

▶ *la concavità, la convessità e i punti di flesso di f:*

f è concava su $]-1,1[$.



■ **Esercizio 2.54.** *Si determini una primitiva F della funzione*

$$f(x) = \log\left(1+\sqrt{x}\right).$$

Risultato

$$F(x) = (x-1)\log(1+\sqrt{x}) + \sqrt{x} - \frac{1}{2}x$$

Svolgimento
Si ha

$$\begin{aligned}
\int \log\left(1+\sqrt{x}\right) dx &= \left(\int 2(t-1)\log t \, dt\right)_{t=1+\sqrt{x}} = \\
&= \left((t-1)^2 \log t - \int \frac{(t-1)^2}{t}\, dt\right)_{t=1+\sqrt{x}} = \\
&= \left((t-1)^2 \log t - \int \left(t-2+\frac{1}{t}\right) dt\right)_{t=1+\sqrt{x}} = \\
&= \left((t-1)^2 \log t - \left(\frac{t^2}{2} - 2t + \log t\right) + c\right)_{t=1+\sqrt{x}} = \\
&= (x-1)\log\left(1+\sqrt{x}\right) - \frac{(1+\sqrt{x})^2}{2} + 2(1+\sqrt{x}) + c,
\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

2.2.4 9 giugno 2003

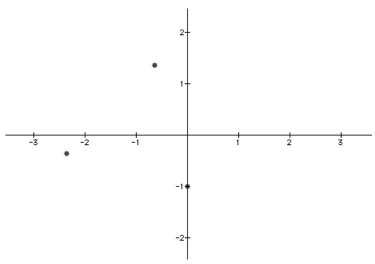
■ **Esercizio 2.55.** *Si determinino e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E delle soluzioni dell'equazione*

$$(1+\bar{z})^3 = (1+i)^3,$$

dove $\bar{z}$ indica il coniugato del numero complesso z.

Risultato

$$E = \Big\{ -i,\ \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{11}{12}\pi - i\sin\tfrac{11}{12}\pi\right) - 1,\ \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{19}{12}\pi - i\sin\tfrac{19}{12}\pi\right) - 1 \Big\}$$



Svolgimento
Poniamo $w = 1+\bar{z}$, ossia $z = \bar{w} - 1$, e risolviamo dapprima l'equazione

$$w^3 = (1+i)^3.$$

Usiamo la rappresentazione polare dei numeri complessi: $w = [\rho, \vartheta]$, con $\rho \geq 0$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$, e $1+i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$. Dalla formula di De Moivre si ottiene

$$w^3 = (1+i)^3 \Leftrightarrow [\rho^3, 3\vartheta] = \left[2^{3/2}, \frac{3}{4}\pi\right] \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \vartheta = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi \ (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Le soluzioni distinte di $w^3 = (1+i)^3$ sono dunque

$$1+i,\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right),\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi + i\sin\frac{19}{12}\pi\right).$$

Pertanto le soluzioni di $(1+\bar{z})^3 = (1+i)^3$ sono

$$-i,\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi - i\sin\frac{11}{12}\pi\right) - 1,\ \sqrt{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi - i\sin\frac{19}{12}\pi\right) - 1.$$

■ **Esercizio 2.56.** *Si consideri l'insieme di numeri reali*

$$E = \left\{ \frac{1}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \mathbb{N}.$$

Si determinino:

▶ $\inf E =$ $0\ (= \min E)$

▶ $\sup E =$ $+\infty$

▶ *l'insieme dei punti di accumulazione di E:* $\{0, +\infty\}$

▶ *l'insieme dei punti isolati di E:* $E \setminus \{0\}$

▶ *l'insieme dei punti interni di E:* $\emptyset$

■ **Esercizio 2.57.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a^x - a}{x-1}, & \text{se } x < 1, \\ \log 4, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

▶ *Si determini $a \in \mathbb{R}^+$ in modo che f sia continua su $\mathbb{R}$.*

La funzione f è continua su $\mathbb{R}$ se e solo se è continua in 1, cioè se e solo se

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \to 1^-} \frac{a^x - a}{x-1} = \log 4 = 2 \log 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x \to 1^-} a \frac{a^{x-1} - 1}{x-1} = a \log a = 2 \log 2.$$

Essendo $2 \log 2 > 0$ e $a > 0$, deve essere anche $\log a > 0$ e quindi $a > 1$. Poiché la funzione $x \mapsto x \log x$ è strettamente crescente se $x \geq 1$, si conclude che l'unica soluzione dell'equazione $a \log a = 2 \log 2$ è

$$a = 2.$$

▶ *Si decida se, per tale a, f è derivabile su $\mathbb{R}$.*

Se $a = 2$, la funzione f è derivabile su $\mathbb{R}$ se e solo se è derivabile in 1. Calcoliamo, utilizzando il teorema di de l'Hospital,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{2^x-2}{x-1}-\log 4}{x-1}=\\
&=\lim_{x\to 1^-}\frac{2^x-2-(x-1)\log 4}{(x-1)^2}=(\log 2)^2 \Leftarrow\\
\Leftarrow &\lim_{x\to 1^-}\frac{2^x\log 2-\log 4}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\log 2}{2}\cdot 2\cdot\frac{2^{x-1}-1}{x-1}=(\log 2)^2.
\end{aligned}$$

D'altra parte, si ha

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0.$$

Dunque f non è derivabile in 1.

■ **Esercizio 2.58.** *Si consideri la funzione*

$$f(x)=2\ \arctan x+\frac{1-x}{1+x}.$$

▶ *Si determinino:*

- *il dominio di f:* $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
- *i limiti di f:*

  ∗ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\pi-1$ ∗ $\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$
  ∗ $\lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ ∗ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\pi-1$

- *la derivata prima di f:*

$$f'(x)=\frac{4x}{(1+x^2)(1+x)^2}$$

- *i segni di f':*

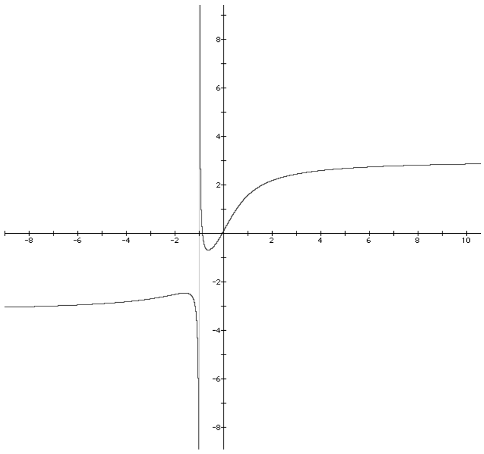
  $f'(x)<0$ se $x<-1$ oppure $-1<x<0$; $f'(x)>0$ se $x>0$; $f'(0)=0$;

- *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:*

  f è strettamente decrescente su $]-\infty,-1[$ e su $]-1,0[$; f è strettamente crescente su $]0,+\infty[$; $\inf f=-\infty$, $\sup f=+\infty$, 0 è punto di minimo relativo, con $f(0)=1$, e $f(0)=\min f|_{]-1,+\infty[}$;

• *i segni di f:*

$f(x) < 0$ se $x < -1$; $f(x) > 0$ se $x > -1$.



▶ *Si determini il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.*

$t < -\pi - 1$:	1 soluzione,
$-\pi - 1 \leq t < 1$:	0 soluzioni,
$t = 1$:	1 soluzione,
$1 < t < \pi - 1$:	2 soluzioni,
$t \geq \pi - 1$:	1 soluzione.

■ **Esercizio 2.59.** *Si determini una primitiva F della funzione*

$$f(x) = \frac{\log x}{(x-1)^2}$$

sull'intervallo $]1, +\infty[$.

Risultato

$$F(x) = -\frac{\log x}{x-1} + \log\frac{x-1}{x}$$

Svolgimento
Integrando per parti, si ottiene

$$\int \frac{\log x}{(x-1)^2} dx = -\frac{\log x}{x-1} + \int \frac{1}{x(x-1)} dx.$$

Inoltre, risulta

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \Leftrightarrow 1 = A(x-1) + Bx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = (A+B)x - A \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

e quindi

$$\frac{1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}.$$

Pertanto si conclude che

$$\int \frac{\log x}{(x-1)^2} dx = -\frac{\log x}{x-1} - \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx =$$

$$= -\frac{\log x}{x-1} - \log x + \log(x-1) + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$.

■ **Esercizio 2.60.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_3^{3x} \frac{t + \cos t}{t-1}\, dt.$$

▶ *Si calcoli, giustificando la risposta,* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Si ha, per $t > 1$,

$$\frac{t+\cos t}{t-1} \geq \frac{t-1}{t-1} = 1$$

e quindi, per $x > 1$,

$$f(x) = \int_3^{3x} \frac{t+\cos t}{t-1} dt \geq \int_3^{3x} 1 dt = 3(x-1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

▶ *Si calcoli, giustificando la risposta,* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Si tratta di una forma d'indecisione del tipo ∞/∞. Applicando la regola di de l'Hospital e il teorema fondamentale del calcolo, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \Leftarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+\cos(3x)}{3x-1} \cdot 3 = 3.$$

2.2.5 23 giugno 2003

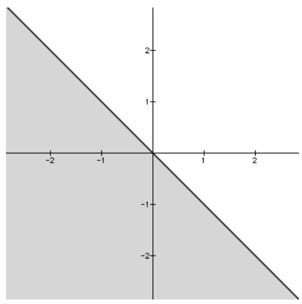
■ **Esercizio 2.61.** *Si determinino e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della disequazione*

$$\Re(\bar{z} + iz) \geq \Re(2z + i\ ),$$

dove $\Re(w)$ e $\bar{w}$ indicano rispettivamente la parte reale e il coniugato del numero complesso w.

Risultato

$$E = \{x + iy : x + y \leq 0\}$$



Svolgimento

Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\Re(\bar{z} + iz) = \Re(x - y + i(x - y)) = x - y, \quad \Re(2z + i\ ) = \Re(2x + i(2y + 1)\ ) = 2x$$

e quindi

$$\Re(\bar{z} + iz) \geq \Re(2z + i\ ) \Leftrightarrow x - y \geq 2x \Leftrightarrow x + y \leq 0.$$

■ **Esercizio 2.62.** *Si consideri l'insieme di numeri reali*

$$E = \{\arctan n : n \in \mathbb{N}\} \cup]0, \pi/4[,$$

dove $\mathbb{N}$ indica l'insieme dei numeri naturali.

Si determinino:

► $\inf E =$ $0 = \min E$

▶ $\sup E =$ $\pi/2$

▶ *l'insieme dei punti di accumulazione di E*: $[0,\pi/4] \cup \{\pi/2\}$

▶ *l'insieme dei punti isolati di E*: $\{\arctan n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$

▶ *l'insieme dei punti interni di E*: $]0,\pi/4[$

■ **Esercizio 2.63.** *Si calcoli, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^n.$$

Risultato

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha < 1 \\ e, & \text{se } \alpha = 1 \\ 1, & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Svolgimento

* Sia $\alpha \leq 0$. Si ha
$$\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$
* Sia $\alpha > 0$. Si ha
$$\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^n = \exp\left(n\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) =$$
$$= \exp\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)}{\frac{1}{n^\alpha}}\, n^{1-\alpha}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty, & \text{se } 0<\alpha<1, \\ e, & \text{se } \alpha = 1, \\ 1, & \text{se } \alpha > 1, \end{cases}$$

tenendo conto che $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\log(1+t)}{t} = 1$.

■ **Esercizio 2.64.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \log(x+1) + \frac{1}{x-1}.$$

Si determinino:

▶ *il dominio di f:* $\operatorname{dom} f =]-1,1[\cup]1,+\infty[$

▶ *i limiti di f:*

$*\ \lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$ $\quad$ $*\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

$*\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ $\quad$ $*\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

▶ *la derivata prima di f:*

$$f'(x) = \frac{x(x-3)}{(x+1)(x-1)^2}$$

▶ *i punti di annullamento e i segni di f':*

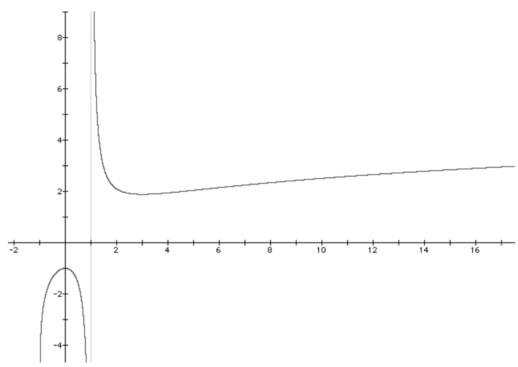
$f'(x) < 0$ se $x \in]0,1[\cup]1,3[$; $f'(x) > 0$ se $x \in]-1,0[\cup]3,+\infty[$; $f'(x) = 0$ se $x \in \{0,3\}$;

▶ *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:*

f è strettamente decrescente su $]0,1[$ e su $]1,3[$; f è strettamente crescente su $]-1,0[$ e su $]3,+\infty[$; $\inf f = -\infty$; $\sup f = +\infty$; 0 è punto di massimo relativo, con $f(0) = -1$; 3 è punto di minimo relativo, con $f(3) = \log 4 + 1/2$;

▶ *i segni di f:*

$f(x) < 0$ se $x \in]-1,1[$; $f(x) > 0$ se $x \in]1,+\infty[$.



■ **Esercizio 2.65.** *Si calcoli*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

Risultato

$$\frac{1}{2}\log 2$$

Svolgimento
Poiché

$$\frac{d}{dx}(\sin x + \cos x) = \cos x - \sin x,$$

si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx =$$

$$= \Big[\log(\sin x + \cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \log\sqrt{2} = \frac{1}{2}\log 2.$$

■ **Esercizio 2.66.** *Si consideri, per $x > 0$, la funzione*

$$f(x) = \log\left(\int_x^{2x} e^{t^2}\, dt\right).$$

▶ *Si determinino, giustificando la risposta:*

- $\lim_{x\to 0^+} f(x)$:

  dal teorema della media integrale si ottiene

  $$\int_x^{2x} e^{t^2}\, dt = e^{\xi^2}(2x - x) = e^{\xi^2} x,$$

  con $0 < x < \xi < 2x$, e quindi

  $$\log\left(\int_x^{2x} e^{t^2}\, dt\right) = \log(e^{\xi^2} x) = \xi^2 + \log x \le 4x^2 + \log x;$$

  si conclude allora che

  $$\log\left(\int_x^{2x} e^{t^2}\, dt\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty;$$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

  procedendo come sopra, si ottiene
$$\log\left(\int_x^{2x} e^{t^2}\,dt\right) = \log(e^{\xi^2}x) = \xi^2 + \log x \geq x^2 + \log x;$$
  si conclude allora che
$$\log\left(\int_x^{2x} e^{t^2}\,dt\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

▶ *Si calcoli $f'(x)$.*

Per il teorema fondamentale del calcolo, si ha
$$f'(x) = \frac{2e^{4x^2} - e^{x^2}}{\int_x^{2x} e^{t^2}\,dt}.$$

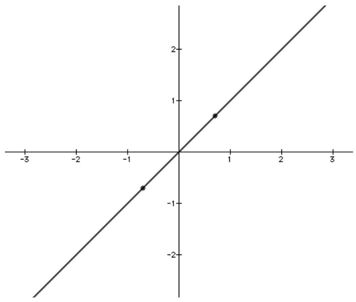
▶ *Si verifichi che f è strettamente crescente su $\mathbb{R}^+$.*

Per ogni $x > 0$, si ha
$$f'(x) = \frac{2e^{4x^2} - e^{x^2}}{\int_x^{2x} e^{t^2}\,dt} = \frac{e^{x^2}(2e^{3x^2} - 1)}{\int_x^{2x} e^{t^2}\,dt} > 0.$$

2.2.6 14 luglio 2003

■ **Esercizio 2.67.** *Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione*
$$\frac{z(1+i) + \bar{z}(1-i)}{z^2 - i} = 0,$$
dove $\bar{w}$ indica il coniugato del numero complesso w.

Risultato
$$E = \{x + yi \in \mathbb{C} : y = x\} \setminus \left\{\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right\}$$



Svolgimento
Si ha

$$\frac{z(1+i)+\bar{z}(1-i)}{z^2-i}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z(1+i)+\bar{z}(1-i)=0 \\ z^2-i\neq 0 \end{cases}.$$

Posto $z=x+yi$, con $x,y\in\mathbb{R}$, risulta

$$z^2=i \Leftrightarrow (x+yi)^2=i \Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=0+1i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y)=0 \\ 2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ 2x^2=1 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-x \\ -2x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x^2={}^1\!/_2 \end{cases} \Leftrightarrow y=x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e quindi

$$z^2-i\neq 0 \Leftrightarrow z\neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

Inoltre si ha

$$z(1+i)+\bar{z}(1-i)=0 \Leftrightarrow (z+\bar{z})+i(z-\bar{z})=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x-2y=0 \Leftrightarrow x=y.$$

■ **Esercizio 2.68.** *Si consideri l'insieme di numeri reali*

$$E=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}^+\right\},$$

con $\mathbb{N}^+=\{n\in\mathbb{N} : n\geq 1\}$.

Si determinino:

▶ $\inf E =$	$-1\notin E$
▶ $\sup E =$	${}^3\!/_2$ $(=\max E)$
▶ *l'insieme dei punti di accumulazione di* E:	$\{-1,1\}$
▶ *l'insieme dei punti isolati di* E :	E
▶ *l'insieme dei punti interni di* E:	$\emptyset$

■ **Esercizio 2.69.** *Si calcoli, facendo uso dei limiti notevoli*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\arctan x}{x^4(1-\cos^2(x^{-2}))}.$$

Risultato

$$-\frac{\pi}{2}$$

Svolgimento
Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\arctan x}{x^4(1-\cos^2(x^{-2}))} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\arctan x}{x^4 \sin^2(x^{-2})} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \arctan x \cdot \left(\frac{x^{-2}}{\sin(x^{-2})}\right)^2 = -\frac{\pi}{2} \cdot 1.$$

■ **Esercizio 2.70.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \log(1-\log x).$$

Si determinino:

▶ *il dominio di f:* $\operatorname{dom} f = \,]0, e[$

▶ *i segni di f:*

$$f(x) > 0 \text{ in }]0,1[,\ f(1) = 0,\ f(x) < 0 \text{ in }]1, e[;$$

▶ *i limiti di f:*

$* \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $* \lim_{x\to e^-} f(x) = -\infty$

▶ *la derivata prima di f:*

$$f'(x) = \frac{1}{x(\log x - 1)}$$

▶ *i punti di annullamento e i segni di f':*

$f'(x) < 0$ in $\operatorname{dom} f$;

▶ *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:*

f è strettamente decrescente in $\operatorname{dom} f$, $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$;

▶ *la derivata seconda di f:*

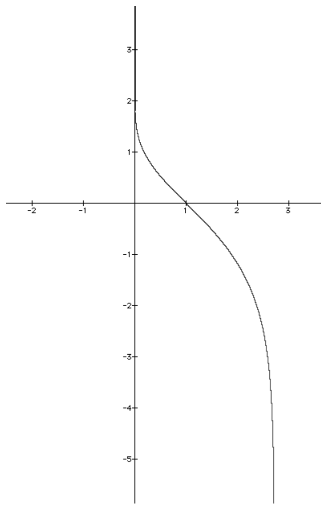
$$f''(x) = -\frac{\log x}{x^2(\log x - 1)^2}$$

▶ *i segni di f'':*

$f''(x) > 0$ in $]0, 1[$, $f''(1) = 0$, $f''(x) < 0$ in $]1, e[$;

▶ *la concavità, la convessità, i punti di flesso di f:*

f è convessa in $]0, 1[$, 1 è punto di flesso discendente, f è concava in $]1, e[$.



■ **Esercizio 2.71.** *Si calcoli l'integrale generalizzato*

$$\int_0^{e^2} \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx.$$

Risultato

$$0$$

Svolgimento
Per ogni $x > 0$, si ha

$$\int_x^{e^2} \frac{\log t}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t}\log t\right]_x^{e^2} - 2\int_x^{e^2} \frac{\sqrt{t}}{t} dt =$$

$$= (4e - 2\sqrt{x}\log x) - 4\int_x^{e^2} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = (4e - 2\sqrt{x}\log x) - 4\left[\sqrt{t}\right]_x^{e^2} =$$

$$= -2\sqrt{x}\log x + 4\sqrt{x}$$

e quindi

$$\int_x^{e^2} \frac{\log t}{\sqrt{t}} dt = -2\sqrt{x}\log x + 4\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

■ **Esercizio 2.72.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_x^1 \left(\int_1^t \sin(\pi s^2)\, ds\right) dt.$$

► *Si determini il polinomio di Taylor $p_{3,1}$ di ordine 3 relativo al punto $x_0 = 1$ della funzione f.*

Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{d}{dx}\left(-\int_1^x \left(\int_1^t \sin(\pi s^2) ds\right) dt\right) = -\int_1^x \sin(\pi s^2) ds \\ f''(x) &= \tfrac{d}{dx}\left(-\int_1^x \sin(\pi s^2) ds\right) = -\sin(\pi x^2) \\ f'''(x) &= -2\pi x \cdot \cos(\pi x^2). \end{aligned}$$

Poiché

$$f(1) = 0, \qquad f'(1) = 0, \qquad f''(1) = 0, \qquad f'''(1) = 2\pi,$$

si conclude che

$$p_{3,1}(x) = \frac{\pi}{3}(x-1)^3.$$

► *Si calcoli* $\operatorname{ord}_1 f$.

Si ha $\operatorname{ord}_1 f = 3$, essendo $f(x) = \frac{\pi}{3}(x-1)^3 + E_3(x)$, con $\operatorname{ord}_1 \frac{\pi}{3}(x-1)^3 = 3$ e $\operatorname{ord}_1 E_3(x) > 3$.

2.2.7 15 settembre 2003

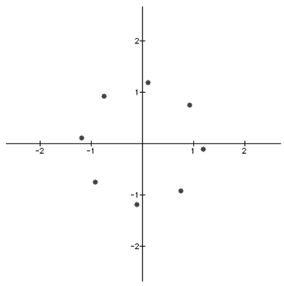
■ **Esercizio 2.73.** *Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme* E *delle soluzioni* $z \in \mathbb{C}$ *dell'equazione*

$$i\,\bar{z}^5 = (1+i)\,z^3,$$

dove $\bar{z}$ *indica il coniugato del numero complesso* z.

Risultato

$$E = \left\{ \sqrt[4]{2}\left(\cos(-\tfrac{\pi}{32} + k\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{32} + k\tfrac{\pi}{4})\right) : k \in \{0,1,2,\dots,7\} \right\}$$



Svolgimento
Usando la rappresentazione polare dei numeri complessi, si ha: $z = [\rho, \vartheta]$, con $\rho \geq 0$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$, $\bar{z} = [\rho, -\vartheta]$, $i = [1, \frac{\pi}{2}]$ e $1 + i = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}]$. Dalla formula di De Moivre, si ottiene

$$i\,\bar{z}^5 = (1+i)\,z^3 \Leftrightarrow [1, \tfrac{\pi}{2}] \cdot [\rho, -\vartheta]^5 = [\sqrt{2}, \tfrac{\pi}{4}] \cdot [\rho, \vartheta]^3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [1, \tfrac{\pi}{2}] \cdot [\rho^5, -5\vartheta] = [\sqrt{2}, \tfrac{\pi}{4}] \cdot [\rho^3, 3\vartheta] \Leftrightarrow [\rho^5, \tfrac{\pi}{2} - 5\vartheta] = [\sqrt{2}\rho^3, 3\vartheta + \tfrac{\pi}{4}] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^5 = \sqrt{2}\rho^3 \\ \frac{\pi}{2} - 5\vartheta = 3\vartheta + \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow (\rho = 0) \vee \begin{cases} \rho = \sqrt[4]{2} \\ \vartheta = \frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{4}, \ (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Le soluzioni distinte si ottengono per $k \in \{0,1,2,\dots,7\}$.

■ **Esercizio 2.74.** *Si consideri l'insieme di numeri reali*

$$E = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}^+ \right\} \cup \,]e, 3].$$

con $\mathbb{N}^+ = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$.

Si determinino:

▶ $\inf E =$ $2\,(=\min E)$

▶ $\sup E =$ $3\,(=\max E)$

▶ *l'insieme dei punti di accumulazione di E:* $[e, 3]$

▶ *l'insieme dei punti isolati di E:* $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}^+\right\}$

▶ *l'insieme dei punti interni di E:* $]e, 3[$

■ **Esercizio 2.75.** *Si provi che l'equazione*

$$\frac{1-x^4}{x^3} = \arctan x$$

ha in $]0, +\infty[$ *esattamente una soluzione.*

Svolgimento
Si consideri la funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1-x^4}{x^3} - \arctan x = \frac{1}{x^3} - x - \arctan x.$$

Si ha che f è continua, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Per il teorema della permanenza del segno e il teorema di esistenza degli zeri, f si annulla in almeno un punto $c > 0$. Questo punto c è unico dato che f è strettamente decrescente in $]0, +\infty[$ in quanto somma delle tre funzioni strettamente decrescenti $1/x^3$, $-x$ e $-\arctan x$.

■ **Esercizio 2.76.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \log(\pi - 4\arctan x).$$

Si determinino:

▶ *il dominio e i segni di f:*

$\operatorname{dom} f =]-\infty, 1[$; $f(x) > 0$ se $x < \tan\frac{\pi-1}{4}$; $f(x) = 0$ se $x = \tan\frac{\pi-1}{4}$; $f(x) > 0$ se $\tan\frac{\pi-1}{4} < x < 1$;

▶ *i limiti di f:*

$$* \lim_{x\to-\infty} f(x) = \log(3\pi), \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$$

▶ *la derivata prima di* f*:*

$$f'(x) = \frac{1}{(\arctan x - \frac{\pi}{4})(1 + x^2)}$$

▶ *i punti di annullamento e i segni di* f'*:*

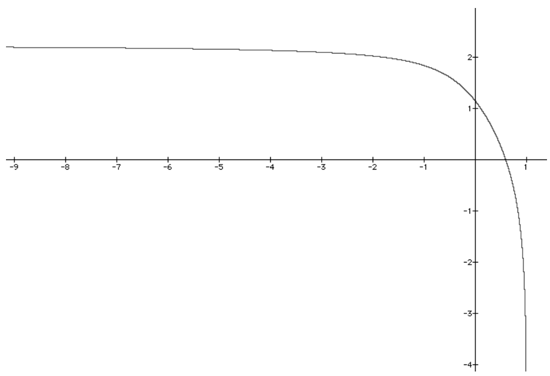
$f'(x) < 0$ per ogni $x \in \operatorname{dom} f$;

▶ *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di* f*:*

f è strettamente decrescente in $\operatorname{dom} f$; $\inf f = -\infty$, $\sup f = \log(3\pi)$;

▶ *l'immagine di* f*:*

$\operatorname{im} f =]-\infty, \log(3\pi)[$, essendo f continua su un intervallo;



▶ $(f^{-1})'(\log \pi)$:

Si ha

$$f(x) = \log \pi \Leftrightarrow \log(\pi - 4 \arctan x) = \log \pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \pi - 4 \arctan x = \pi \Leftrightarrow \arctan x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

e quindi, per il teorema sulla derivata della funzione inversa,

$$(f^{-1})'(\log \pi) = \frac{1}{f'(0)} = -\frac{\pi}{4}.$$

■ **Esercizio 2.77.** *Si calcoli l'integrale generalizzato*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx.$$

Risultato

$$\pi$$

Svolgimento
Sull'intervallo $]0,+\infty[$ si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \left(\int \frac{1}{t(t^2+1)}\,2t\,dt\right)_{t=\sqrt{x}} =$$

$$= \left(\int \frac{2}{t^2+1}\,dt\right)_{t=\sqrt{x}} = 2\arctan(\sqrt{x}) + c, \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,dt = \lim_{x\to 0^+} (2\arctan 1 - 2\arctan\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\lim_{x\to +\infty} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}\,(t+1)}\,dt = \lim_{x\to +\infty} (2\arctan\sqrt{x} - 2\arctan 1) = \frac{\pi}{2},$$

si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx = \pi.$$

■ **Esercizio 2.78.** *Si consideri, per $x \geq 1$, la funzione*

$$f(x) = \int_2^{2x} e^{-t^2}\,dt + \int_3^{3x} \frac{1}{\log t}\,dt.$$

► *Si calcolino:*

- $f'(x) = \quad 2e^{-4x^2} + \dfrac{3}{\log(3x)}$
- $f''(x) = \quad -16x \cdot e^{-4x^2} - \dfrac{3}{x\log^2(3x)}$

► *Si provi che f è concava sull'intervallo* $[1, +\infty[$.

Siccome $f''(x) < 0$ per ogni $x \in [1, +\infty[$, f è concava su tale intervallo.

3

Anno Accademico 2003 - 2004

3.1 Prove intermedie

3.1.1 25 ottobre 2003 — Tema A

■ **Esercizio 3.1.** *Si determinino l'estremo inferiore e l'estremo superiore dei seguenti insiemi, specificando se sono, rispettivamente, il minimo e il massimo:*

$$A = \{2 + 1/m : m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}, \quad B = \mathbb{N} \cup \{(-1)^n/n : n \in \mathbb{N}^+\},$$
$$C =]-1, 1[\cup \left\{1/\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}, \quad D = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x} \in]-2, 2]\}.$$

Svolgimento

$$\begin{array}{ll} \inf A = 1 \in A, & \sup A = 3 \in A; \\ \inf B = -1 \in B, & \sup B = +\infty; \\ \inf C = -1 \notin C, & \sup C = \sqrt{2} \in C; \\ \inf D = 0 \in D, & \sup D = 4 \in D. \end{array}$$

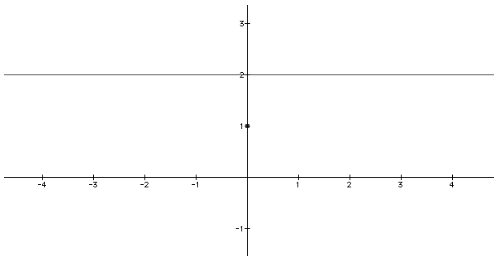
■ **Esercizio 3.2.** *Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E degli $z \in \mathbb{C}$ tali che*

$$\Re\left(\frac{3 + i\,z}{\bar{z} + i}\right) = 0,$$

dove $\Re(w)$ e $\bar{w}$ indicano rispettivamente la parte reale e il coniugato del numero complesso w.

Risultato

$$E = \{x + iy \in \mathbb{C} : (x = 0) \vee (y = 2)\} \setminus \{i\}$$



Svolgimento
Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha, per $z \neq i$,

$$\frac{3 + i\,z}{\bar{z} + i} = \frac{3 + i\,z}{\bar{z} + i} \cdot \frac{z - i}{z - i} = \frac{i\,z^2 + 4z - 3i}{|z - i|^2} =$$

$$= \frac{i(x^2 - y^2 + 2ixy) + 4x + 4iy - 3i}{|z - i|^2} = \frac{-2xy + 4x}{|z - i|^2} + i\,\frac{x^2 - y^2 + 4y - 3}{|z - i|^2}.$$

Quindi, per $z \neq i$, risulta

$$\Re\left(\frac{3 + i\,z}{\bar{z} + i}\right) = \frac{-2xy + 4x}{|z - i|^2} = 0 \Leftrightarrow 2x(2 - y) = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 2).$$

■ **Esercizio 3.3.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \arcsin(1 + \log_5(1 - x)).$$

► *Si determinino, giustificando le risposte:*

- *il dominio di f:*

  $\operatorname{dom} f = [0, {}^{24}\!/_{25}]$; infatti, si ha

$$x \in \operatorname{dom} f \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x > 0 \\ |1 + \log_5(1 - x)| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ -1 \leq 1 + \log_5(1 - x) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ -2 \leq \log_5(1 - x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 5^{-2} \leq 1 - x \leq 5^0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 0 \leq x \leq 1 - 5^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq {}^{24}\!/_{25};$$

• *i segni di f:*

$f(x) > 0$ se $x \in [0, 4/5[$, $f(4/5) = 0$ e $f(x) < 0$ se $x \in\,]4/5, 24/25]$; infatti, se $x \in \operatorname{dom} f$, si ha

$$f(x) = \arcsin(1 + \log_5(1 - x)) > 0 \Leftrightarrow 1 + \log_5(1 - x) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_5(1 - x) > -1 \Leftrightarrow 1 - x > 5^{-1} \Leftrightarrow x < 4/5$$

e

$$f(4/5) = 0;$$

• $f^{-1}(\{\pi/6\})$:

si ha $f^{-1}(\{\pi/6\}) = \{1 - 1/\sqrt{5}\}$; infatti, se $x \in \operatorname{dom} f$, si ha

$$f(x) = \arcsin(1 + \log_5(1 - x)) = \pi/6 \Leftrightarrow 1 + \log_5(1 - x) = 1/2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_5(1 - x) = -1/2 \Leftrightarrow 1 - x = 5^{-1/2} \Leftrightarrow x = 1 - 1/\sqrt{5}.$$

▶ *Si provi la decrescenza di f.*

Se $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$, si ha

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Rightarrow 1 + \log_5(1 - x_1) > 1 + \log_5(1 - x_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x_1) = \arcsin(1 + \log_5(1 - x_1)) > \arcsin(1 + \log_5(1 - x_2)) = f(x_2).$$

3.1.2 25 ottobre 2003 — Tema B

■ **Esercizio 3.4.** *Si determinino l'estremo inferiore e l'estremo superiore dei seguenti insiemi, specificando se sono, rispettivamente, il minimo e il massimo:*

$$A = \{2 + r : r \in \mathbb{Q}^+\}, \qquad B = \mathbb{Z}^- \cup \{2/n : n \in \mathbb{N}^+\},$$
$$C =]-\sqrt{2}, \sqrt{5}[\cup \{1, 2\}, \quad D = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \in]-1, 4]\right\}.$$

■ **Esercizio 3.5.** *Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E degli $z \in \mathbb{C}$ tali che*

$$\Re\left(\frac{3 - i\,\bar{z}}{z - i}\right) = 0,$$

dove $\Re(w)$ e $\bar{w}$ indicano rispettivamente la parte reale e il coniugato del numero complesso w.

■ **Esercizio 3.6.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \arcsin(1 - \log_2(x-1)).$$

▶ *Si determinino, giustificando le risposte:*

- *il dominio di f:*
- *i segni di f:*
- $f^{-1}(\{\pi/6\}) =$

▶ *Si provi la decrescenza di f.*

3.1.3 25 ottobre 2003 — Tema C

■ **Esercizio 3.7.** *Si determinino l'estremo inferiore e l'estremo superiore dei seguenti insiemi, specificando se sono, rispettivamente, il minimo e il massimo:*

$$A = \{2 + 1/x : x \in]0,1]\}, \quad B = \mathbb{N} \cup \{1/m : m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\},$$
$$C =]-1/\pi, \pi[\cup \{-1, 2\}, \quad D = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x} \in [-4, 2[\}.$$

■ **Esercizio 3.8.** *Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E degli $z \in \mathbb{C}$ tali che*

$$\Re\left(\frac{i\,\bar{z} - 3}{z - i}\right) = 0,$$

dove $\Re(w)$ e $\bar{w}$ indicano rispettivamente la parte reale e il coniugato del numero complesso w.

■ **Esercizio 3.9.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \arcsin(1 - \log_3(x-1)).$$

▶ *Si determinino, giustificando le risposte:*

- *il dominio di f:*
- *i segni di f:*
- $f^{-1}(\{\pi/6\}) =$

▶ *Si provi la decrescenza di f.*

3.1.4 25 ottobre 2003 — Tema D

■ **Esercizio 3.10.** *Si determinino l'estremo inferiore e l'estremo superiore dei seguenti insiemi, specificando se sono, rispettivamente, il minimo e il massimo:*

$$A = \{2 + r : r \in \mathbb{Q}^-\}\,, \quad B = \mathbb{Q}^+ \cup \{1/m : m \in \mathbb{Z}^-\}\,,$$
$$C =]-1/e, e[\cup\{-1, 2\}, \quad D = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \in [-1, 2[\right\}.$$

■ **Esercizio 3.11.** *Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E degli $z \in \mathbb{C}$ tali che*

$$\Re\left(\frac{i\,\bar{z} - 3}{i - z}\right) = 0,$$

dove $\Re(w)$ e $\bar{w}$ indicano rispettivamente la parte reale e il coniugato del numero complesso w.

■ **Esercizio 3.12.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \arcsin(1 + \log_4(1 - x)).$$

▶ *Si determinino, giustificando le risposte:*

- *il dominio di f:*
- *i segni di f:*
- $f^{-1}(\{\pi/6\}) =$

▶ *Si provi la decrescenza di f.*

3.1.5 21 novembre 2003 — Tema A

■ **Esercizio 3.13.** *Sia*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - x} - \sin(7x), & \text{se } x < 0, \\ 1 - x\sqrt[3]{x}, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

▶ *Si dica se esistono e, in caso affermativo, si calcolino*

$*\ \lim_{x\to-\infty} f(x)$ non esiste $\qquad *\ \lim_{x\to0^-} f(x) = 1$

$*\ \lim_{x\to0^+} f(x) = 1 \qquad *\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

▶ *Si verifichi che f è continua in* 0.

Poiché $f(0) = 1 = \lim_{x\to 0} f(x)$, f è continua in 0.

▶ *Ricorrendo alla definizione, si calcolino le derivate sinistra e destra di f in* 0*:*

- *Derivata sinistra:*

$$\begin{aligned} f'_s(0) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - \sin(7x) - 1}{x} = \\ &= \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{1-x} - 7\frac{\sin(7x)}{7x} \right) = 1 - 7 = -6 \end{aligned}$$

- *Derivata destra:*

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - x\sqrt[3]{x} - 1}{x} = -\lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x} = 0$$

▶ *Si dica se f è derivabile in* 0.

Poiché $f'_s(0) \neq f'_d(0)$, f non è derivabile in 0.

▶ *Si verifichi che in* $[0, +\infty[$ *esiste un solo punto $\bar{x}$ tale che* $f(\bar{x}) = 0$.

Poiché f è continua in $[0, +\infty[$, $f(0) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, si conclude, per il teorema della permanenza del segno e il teorema di esistenza degli zeri, che f si annulla almeno in un punto $\bar{x} > 0$. Inoltre, essendo la funzione $x \mapsto x^{4/3}$ strettamente crescente su $[0, +\infty[$, f è strettamente decrescente su $[0, +\infty[$ e quindi il punto di annullamento $\bar{x}$ è unico. Una semplice ispezione mostra infine che è $\bar{x} = 1$.

■ **Esercizio 3.14.** *Si calcoli, usando i limiti notevoli,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 - 2^{\cos x}}{x^2}.$$

Risultato

$$\log 2$$

Svolgimento
Si ha

$$\frac{2 - 2^{\cos x}}{x^2} = 2 \cdot \frac{1 - 2^{(\cos x - 1)}}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 2 \cdot (-\log 2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \log 2.$$

■ **Esercizio 3.15.** *Si calcoli*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\log_{(x^2)}(x+1)-\log_{(x+1)}x\right).$$

Risultato

$$-\frac{1}{2}$$

Svolgimento
Si ha

$$\log_{(x^2)}(x+1)-\log_{(x+1)}x=\frac{\log(x+1)}{2\log x}-\frac{\log x}{\log(x+1)}=$$
$$=\frac{\log x+\log(1+\frac{1}{x})}{2\log x}-\frac{\log x}{\log x+\log(1+\frac{1}{x})}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}.$$

3.1.6 21 NOVEMBRE 2003 — TEMA *B*

■ **Esercizio 3.16.** *Sia*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}+\sin(5x), & \textit{se } -1<x<0,\\ 1-x\sqrt[7]{x}, & \textit{se } x\geq 0.\end{cases}$$

► *Si dica se esistono e, in caso affermativo, si calcolino*

$* \lim_{x\to-1} f(x)=$	$* \lim_{x\to 0^-} f(x)=$
$* \lim_{x\to 0^+} f(x)=$	$* \lim_{x\to+\infty} f(x)=$

► *Si verifichi che f è continua in* 0.

► *Ricorrendo alla definizione, si calcolino le derivate sinistra e destra di f in* 0*:*

- $f'_s(0)=$
- $f'_d(0)=$

► *Si dica se f è derivabile in* 0.

► *Si verifichi che in $[0,+\infty[$ esiste un solo punto $\bar{x}$ tale che $f(\bar{x})=0$.*

■ **Esercizio 3.17.** *Si calcoli, usando i limiti notevoli,*

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^{\cos x} - 3}{x^2}.$$

■ **Esercizio 3.18.** *Si calcoli*

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\log_{(\sqrt{x})}(x+1) - \log_{(x+1)} x \right).$$

3.1.7 21 novembre 2003 — Tema C

■ **Esercizio 3.19.** *Sia*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} + \sin(3x), & \text{se } x < 0, \\ 1 - x\sqrt{x}, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

▶ *Si dica se esistono e, in caso affermativo, si calcolino*

$* \lim_{x \to -\infty} f(x) =$	$* \lim_{x \to 0^-} f(x) =$
$* \lim_{x \to 0^+} f(x) =$	$* \lim_{x \to +\infty} f(x) =$

▶ *Si verifichi che f è continua in* 0.

▶ *Ricorrendo alla definizione, si calcolino le derivate sinistra e destra di f in* 0*:*

- $f'_s(0) =$
- $f'_d(0) =$

▶ *Si dica se f è derivabile in* 0.

▶ *Si verifichi che in $[0, +\infty[$ esiste un solo punto $\bar{x}$ tale che* $f(\bar{x}) = 0$.

■ **Esercizio 3.20.** *Si calcoli, usando i limiti notevoli,*

$$\lim_{x \to 0} \frac{5 - 5^{\cos x}}{x^2}.$$

■ **Esercizio 3.21.** *Si calcoli*

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\log_{x}(x+1) - \log_{(x+1)^2} x \right).$$

3.1.8 21 novembre 2003 — Tema D

■ **Esercizio 3.22.** *Sia*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} + \sin(2x), & \textit{se } -1 < x < 0, \\ 1 - x\sqrt[5]{x}, & \textit{se } x \geq 0. \end{cases}$$

▶ *Si dica se esistono e, in caso affermativo, si calcolino*

$* \lim_{x\to -1} f(x) =$ $\qquad$ $* \lim_{x\to 0^-} f(x) =$

$* \lim_{x\to 0^+} f(x) =$ $\qquad$ $* \lim_{x\to +\infty} f(x) =$

▶ *Si verifichi che f è continua in* 0.

▶ *Ricorrendo alla definizione, si calcolino le derivate sinistra e destra di f in* 0:

- $f'_s(0) =$
- $f'_d(0) =$

▶ *Si dica se f è derivabile in* 0.

▶ *Si verifichi che in $[0, +\infty[$ esiste un solo punto $\bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.*

■ **Esercizio 3.23.** *Si calcoli, usando i limiti notevoli,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{7^{\cos x} - 7}{x^2}.$$

■ **Esercizio 3.24.** *Si calcoli*

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\log_x(x+1) - \log_{\sqrt{x+1}} x\right).$$

3.1.9 19 dicembre 2003 — Tema A

■ **Esercizio 3.25.** *Si consideri la funzione razionale*

$$f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2(x+2)}.$$

▶ *Si determini la decomposizione di Hermite di f.*

Le radici del polinomio a denominatore sono 1, con molteplicità 2, e -2, con molteplicità 1. Pertanto si ha

$$\begin{aligned}
\frac{2x-1}{(x-1)^2(x+2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{C}{x-1}\right) = \\
&= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} - \frac{C}{(x-1)^2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2x-1 = A(x-1)(x+2) + B(x-1)^2 - C(x+2) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2x-1 = (A+B)x^2 + (A-2B-C)x - (2A-B+2C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-2B-C=2 \\ 2A-B+2C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 5/9 \\ B = -5/9 \\ C = -1/3 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Quindi risulta

$$\frac{2x-1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{5}{9(x-1)} + \frac{-5}{9(x+2)} + \frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{3(x-1)}\right).$$

▶ *Si determinino tutte le primitive di f sull'intervallo* $]2, +\infty[$.

L'insieme delle primitive di f sull'intervallo $]2, +\infty[$ è dato da

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2x-1}{(x-1)^2(x+2)}dx = \int \frac{5}{9(x-1)}dx + \int \frac{-5}{9(x+2)}dx + \\
&+ \int \frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{3(x-1)}\right)dx = \frac{5}{9}\log(x-1) - \frac{5}{9}\log(x+2) - \frac{1}{3(x-1)} + c = \\
&= \frac{5}{9}\log\frac{x-1}{x+2} - \frac{1}{3(x-1)} + c,
\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

▶ *Si determini quella primitiva F di f sull'intervallo $]2,+\infty[$ per cui risulta* $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{5}{9} \log \frac{x-1}{x+2} - \frac{1}{3(x-1)} \right) = 0,$$

si ottiene

$$F(x) = \frac{5}{9} \log \frac{x-1}{x+2} - \frac{1}{3(x-1)} + 1.$$

■ **Esercizio 3.26.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{x}} + \log x.$$

▶ *Si determinino:*

- *il dominio di f:* $\quad \operatorname{dom} f =]0,+\infty[$
- *i limiti di f:*

$$* \lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty \qquad * \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- *gli ordini di infinito di f:*

$$\begin{aligned} * \operatorname{Ord}_{0^+} f(x) &= \operatorname{Ord}_{0^+} \tfrac{1}{\sqrt[6]{x}} = \tfrac{1}{6} \\ * \operatorname{Ord}_{+\infty} f(x) &= \operatorname{Ord}_{0^+} \log x \text{ (sottoreale)} \end{aligned}$$

- *la derivata prima di f:*

$$f'(x) = -\frac{1}{6x\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{x} = \frac{6\sqrt[6]{x}-1}{6x\sqrt[6]{x}}$$

- *i punti di annullamento e i segni di f':*

  $f'(x) < 0$ se $x \in]0,6^{-6}[$, $f'(x) > 0$ se $x \in]6^{-6},+\infty[$, $f'(6^{-6}) = 0$

- *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:*

  f è strettamente decrescente su $]0,6^{-6}[$, è strettamente crescente su $]6^{-6},+\infty[$, $\min f = f(6^{-6}) = 6(1-\log 6)$, $\sup f = +\infty$

- *la derivata seconda di f:*

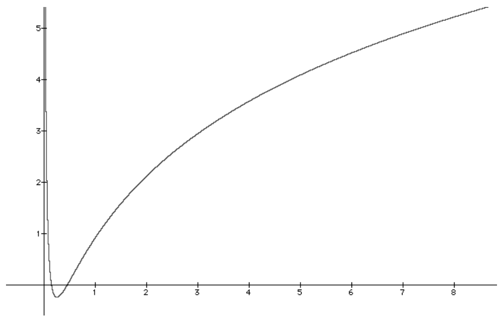
$$f''(x) = \frac{7}{36x^2\sqrt[6]{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{7 - 36\sqrt[6]{x}}{36x^2\sqrt[6]{x}}$$

- *i punti di annullamento e i segni di f'':*

$f''(x) > 0$ se $x \in \left]0, \left(\frac{7}{36}\right)^6\right[$, $f''(x) < 0$ se $x \in \left]\left(\frac{7}{36}\right)^6, +\infty\right[$, $f''\left(\left(\frac{7}{36}\right)^6\right) = 0$

- *la concavità, la convessità e i punti di flesso di f:*

f è convessa su $\left]0, \left(\frac{7}{36}\right)^6\right[$, f è concava su $\left]\left(\frac{7}{36}\right)^6, +\infty\right[$, $\left(\frac{7}{36}\right)^6$ è punto di flesso discendente.



► *Si determini il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.*

$t < 6(1 - \log 6)$:	0 soluzioni,
$t = 6(1 - \log 6)$:	1 soluzione,
$t > 6(1 - \log 6)$:	2 soluzioni.

3.1.10 19 dicembre 2003 — Tema *B*

■ **Esercizio 3.27.** *Si consideri la funzione razionale*

$$f(x) = \frac{x - 2}{(x + 2)^2(x + 1)}.$$

► *Si determini la decomposizione di Hermite di f.*

▶ *Si determinino tutte le primitive di f sull'intervallo* $]2,+\infty[$.

▶ *Si determini quella primitiva F di f sull'intervallo* $]2,+\infty[$ *per cui risulta* $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 2$.

■ **Esercizio 3.28.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}} + \log x.$$

▶ *Si determinino:*

- *il dominio di f:*
- *i limiti di f:*

$$* \lim_{x\to 0^+} f(x) = \qquad\qquad * \lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

- *gli ordini di infinito di f:*

$$* \operatorname{Ord}_{0^+} f(x) = \qquad\qquad * \operatorname{Ord}_{+\infty} f(x) =$$

- *la derivata prima di f:*
- *i punti di annullamento e i segni di f':*
- *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:*
- *la derivata seconda di f:*
- *i punti di annullamento e i segni di f'':*
- *la concavità, la convessità e i punti di flesso di f:*

▶ *Si determini il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.*

3.1.11 19 DICEMBRE 2003 — TEMA C

■ **Esercizio 3.29.** *Si consideri la funzione razionale*

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^2(x-1)}.$$

▶ *Si determini la decomposizione di Hermite di f.*

▶ *Si determinino tutte le primitive di f sull'intervallo* $]2, +\infty[$.

▶ *Si determini quella primitiva F di f sull'intervallo* $]2, +\infty[$ *per cui risulta* $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 3$.

■ **Esercizio 3.30.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \log x.$$

▶ *Si determinino:*

- *il dominio di f:*
- *i limiti di f:*

$$* \lim_{x \to 0^+} f(x) = \qquad\qquad * \lim_{x \to +\infty} f(x) =$$

- *gli ordini di infinito di f:*

$$* \operatorname{Ord}_{0^+} f(x) = \qquad\qquad * \operatorname{Ord}_{+\infty} f(x) =$$

- *la derivata prima di f:*
- *i punti di annullamento e i segni di f':*
- *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:*
- *la derivata seconda di f:*
- *i punti di annullamento e i segni di f'':*
- *la concavità, la convessità e i punti di flesso di f:*

▶ *Si determini il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.*

3.1.12 19 dicembre 2003 — Tema *D*

■ **Esercizio 3.31.** *Si consideri la funzione razionale*

$$f(x) = \frac{x-3}{(x-2)^2(x+1)}.$$

▶ *Si determini la decomposizione di Hermite di f.*

▶ *Si determinino tutte le primitive di f sull'intervallo* $]2, +\infty[$.

▶ *Si determini quella primitiva F di f sull'intervallo* $]2, +\infty[$ *per cui risulta* $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 4$.

■ **Esercizio 3.32.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \log x.$$

▶ *Si determinino:*

- *il dominio di f:*
- *i limiti di f:*

  $* \lim_{x \to 0^+} f(x) =$ $\qquad$ $* \lim_{x \to +\infty} f(x) =$

- *gli ordini di infinito di f:*

  $* \operatorname{Ord}_{0^+} f(x) =$ $\qquad$ $* \operatorname{Ord}_{+\infty} f(x) =$

- *la derivata prima di f:*
- *i punti di annullamento e i segni di f':*
- *la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:*
- *la derivata seconda di f:*
- *i punti di annullamento e i segni di f'':*
- *la concavità, la convessità e i punti di flesso di f:*

▶ *Si determini il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.*

3.2 Temi d'esame

3.2.1 12 gennaio 2004

■ **Esercizio 3.33.** *Si determinino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione*

$$z^2 + i\,\bar{z} + 1 = 0,$$

dove $\bar{z}$ indica il coniugato del numero complesso z.

Risultato

$$z_1 = i\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = i\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Svolgimento
Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$z^2 + i\,\bar{z} + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+iy)^2 + i(x-iy) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy + ix + y + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 + y + 1) + i(2xy + x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + y + 1 = 0 \\ 2xy + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 + y + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 = -1/4 \\ y = -1/2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = 0 \end{cases}.$$

Dunque le soluzioni sono

$$z_1 = i\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = i\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

■ **Esercizio 3.34.** *Si consideri l'insieme di numeri reali*

$$E = \{e + \pi^m : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Si determinino:

► $\inf E =$	$e \notin E$
► $\sup E =$	$+\infty$
► *l'insieme dei punti di accumulazione di E:*	$\{e, +\infty\}$
► *l'insieme dei punti isolati di E:*	E
► *l'insieme dei punti interni di E:*	$\emptyset$

■ **Esercizio 3.35.** *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\sin x} - \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}}{2\,x\,\log x}.$$

Risultato

$$\frac{1}{2}$$

Svolgimento
Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x\,\log x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0^+} (x\,\log x) = 1 \cdot 0 = 0,$$

si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sin x \log x} = e^0 = 1$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\sin x} - \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}}{2\,x\,\log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\sin x} - 1}{2\,x\,\log x} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin x\,\log x} - 1}{\sin x\,\log x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{2\,x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

■ **Esercizio 3.36.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = x\,2^{-\sqrt{x}}.$$

▶ *Si determinino:*

- *il dominio di f e i segni di f:*

  $\operatorname{dom} f = [0, +\infty[;\quad f(x) > 0$, se $x > 0$; $f(0) = 0$

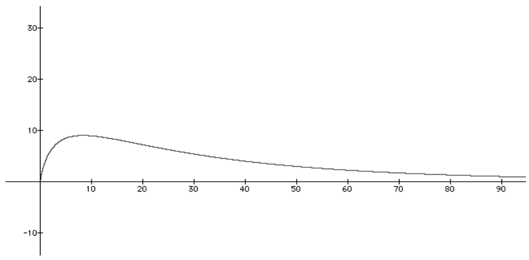
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \qquad 0$
- *la derivata prima di f:*

  $$f'(x) = 2^{-\sqrt{x}}(1 - \log\sqrt{2} \cdot \sqrt{x}),\ \text{se } x > 0;\quad f'(0) = 1$$

- *i segni di f':*
  $f'(x) > 0$ se $x \in \left[0, \frac{1}{\log^2 \sqrt{2}}\right[$, $f'(x) < 0$ se $x \in \left]\frac{1}{\log^2 \sqrt{2}}, +\infty\right[$, $f'\left(\frac{1}{\log^2 \sqrt{2}}\right) = 0$

- *la crescenza, la decrescenza, gli estremi relativi e assoluti di f:*

  f è strettamente crescente su $\left[0, \frac{1}{\log^2 \sqrt{2}}\right[$, f è strettamente decrescente su $\left]\frac{1}{\log^2 \sqrt{2}}, +\infty\right[$,
  $\min f = 0$, $\max f = f\left(\frac{1}{\log^2 \sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\log^2 \sqrt{2}} \cdot 2^{-1/\log\sqrt{2}} = \frac{4}{e^2 \log^2 2}$.



► *Si determini il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.*

$t < 0$:	0 soluzioni,
$t = 0$:	1 soluzione,
$0 < t < \frac{4}{e^2 \log^2 2}$:	2 soluzioni,
$t = \frac{4}{e^2 \log^2 2}$:	1 soluzione,
$t > \frac{4}{e^2 \log^2 2}$:	0 soluzioni.

■ **Esercizio 3.37.** *Si calcoli l'integrale*

$$\int_1^2 (1 + 2\,\log x)\, x\, dx.$$

Risultato

$$4\,\log 2$$

Svolgimento
Integrando per parti, si ottiene

$$\int_1^2 (1+2\,\log x)\,x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}(1+2\,\log x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2}{x}\,dx =$$
$$= 2(1+2\,\log 2) - \frac{1}{2} - \int_1^2 x\,dx = 2+4\,\log 2 - \frac{1}{2} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 =$$
$$= 2+4\,\log 2 - \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2} = 4\,\log 2.$$

■ **Esercizio 3.38.** *Si consideri, per $x > 1$, la funzione*

$$f(x) = \int_1^x \log t\,dt + \int_2^{2x} \frac{1}{\log t}\,dt.$$

Si determinino

▶ $f'(x) \quad = \quad \log x + \dfrac{2}{\log(2x)}$

▶ $f''(x) = \quad \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x\,\log^2(2x)} = \dfrac{\log^2(2x)-2}{x\,\log^2(2x)}$

▶ *i punti di annullamento e i segni di f'':*

essendo $\log(2x) > 0$ per $x > 1$, si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $\log(2x) > \sqrt{2}$, cioè $x > \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}}$; $f''(x) < 0$ se $1 < x < \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}}$; $f''(x) = 0$ se $x = \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}}$

▶ *la concavità, la convessità e i punti di flesso di f:*

f è concava in $[1, \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}}[$; f è convessa in $]\frac{1}{2}e^{\sqrt{2}}, +\infty[$; $\frac{1}{2}e^{\sqrt{2}}$ è punto di flesso ascendente.

3.2.2 26 GENNAIO 2004

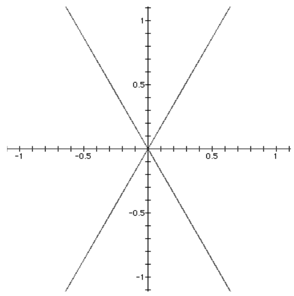
■ **Esercizio 3.39.** *Si determinino e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione*

$$\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = \frac{\bar{z}}{z},$$

dove $\bar{z}$ indica il coniugato del numero complesso z.

Risultato

$$E = \left\{ \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) : (\rho > 0) \wedge (\vartheta = k\tfrac{\pi}{3}),\ \text{con } k \in \{0, 1, \ldots, 5\} \right\}$$



Svolgimento
Per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si ha

$$\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 = \frac{\bar{z}}{z} \Leftrightarrow z^3 = \bar{z}^3 \Leftrightarrow z^3 = \overline{z^3} \Leftrightarrow z^3 \in \mathbb{R}.$$

Posto $z = [\rho, \vartheta]$, con $\rho > 0$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$, si ha

$$z^3 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [\rho^3, 3\vartheta] \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\rho > 0) \wedge (3\vartheta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}).$$

Le soluzioni distinte si ottengono per $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 5\}$.

■ **Esercizio 3.40.** *Si consideri l'insieme di numeri reali*

$$E =]-2, -1[\cup \left\{ (-2)^{-n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si determinino:

▶ $\inf E =$	-2 $(\in E)$
▶ $\sup E =$	1 $(\in E)$
▶ *l'insieme dei punti di accumulazione di E:*	$[-2, -1] \cup \{0\}$
▶ *l'insieme dei punti isolati di E:*	$\{(-2)^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$
▶ *l'insieme dei punti interni di E:*	$]-2, -1[$.

■ **Esercizio 3.41.** *Si calcoli, usando i limiti notevoli,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-(1-6x)^{5/6}}{\sin(5x)}.$$

Risultato

$$1$$

Svolgimento
Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-(1-6x)^{5/6}}{\sin(5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-6x)^{5/6}-1}{-6x} \cdot \frac{6x}{5x} \cdot \frac{5x}{\sin(5x)} = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} \cdot 1 = 1,$$

essendo

$$\lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{\frac{5}{6}}-1}{t} = \frac{5}{6}.$$

■ **Esercizio 3.42.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = x + 2\log\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

▶ *Si determinino:*

- *il dominio di f:* $\quad \operatorname{dom} f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$
- *i limiti di f:*

  - $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$
  - $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$
  - $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
  - $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

- *la derivata prima di f:*

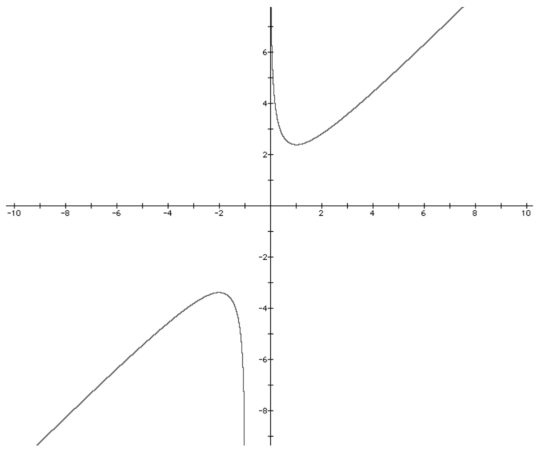
$$f'(x) = \frac{x^2+x-2}{x(x+1)}$$

- *i segni di f':*

$f'(x) > 0$ se $x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$, $f'(x) < 0$ se $x \in]-2, -1[\cup]0, 1[$, $f'(x) = 0$ se $x = -2$ oppure $x = 1$

- *la crescenza, la decrescenza, gli estremi relativi e assoluti di f:*

  f è strettamente crescente su $]-\infty, -2[$ e su $]1, +\infty[$; f è strettamente decrescente su $]-2, -1[$ e su $]0, 1[$; -2 è punto di massimo relativo, con $f(-2) = -2 - 2\log 2$; 1 è punto di minimo relativo, con $f(1) = 1 + 2\log 2$; $\inf f = -\infty$; $\sup f = +\infty$.



► *Si determini, al variare di $t \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$.*

$t < -2 - 2\log 2$:	2 soluzioni,
$t = -2 - 2\log 2$:	1 soluzione,
$-2 - 2\log 2 < t < 1 + 2\log 2$:	0 soluzioni,
$t = 1 + 2\log 2$:	1 soluzione,
$t > 1 + 2\log 2$:	2 soluzioni.

■ **Esercizio 3.43.** *Si calcoli l'integrale generalizzato*

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}\, dx.$$

Risultato

$$\frac{9}{10}$$

Svolgimento
Per ogni $x \in [0, 1[$, si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{t}{\sqrt[3]{1-t}}\, dt &= -\frac{3}{2}\left[t\sqrt[3]{(1-t)^2}\right]_0^x + \frac{3}{2}\int_0^x \sqrt[3]{(1-t)^2}\, dt = \\
&= -\frac{3}{2}x\sqrt[3]{(1-x)^2} - \frac{9}{10}\left[\sqrt[3]{(1-t)^5}\right]_0^x \\
&= -\frac{3}{2}x\sqrt[3]{(1-x)^2} - \frac{9}{10}\sqrt[3]{(1-x)^5} + \frac{9}{10} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{9}{10}.
\end{aligned}$$

■ **Esercizio 3.44.** *Si consideri, per $x > -1$, la funzione*

$$f(x) = \int_x^{x^2} \log(1+t)\, dt.$$

Si determinino:

► $f'(x) \;=\; 2x\log(1+x^2) - \log(1+x)$

► $f''(x) = \; 2\log(1+x^2) + \dfrac{4x^2}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x}$

► *il polinomio di Taylor $p_{2,0}$ di ordine 2 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione f:*

Essendo

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 0, \qquad f''(0) = -1,$$

si ottiene

$$p_{2,0}(x) = -\frac{1}{2}x^2.$$

3.2.3 16 febbraio 2004

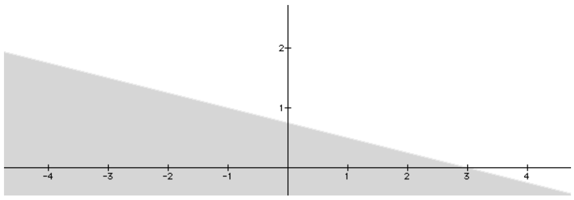
■ **Esercizio 3.45.** *Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della disequazione*

$$2|z-1| > |2z+i|,$$

dove $|z|$ indica il modulo del numero complesso z.

Risultato

$$E = \{x + yi : 8x + 4y - 3 < 0\}$$



Svolgimento
Posto $z = x + yi$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$2|z-1| > |2z+i| \Leftrightarrow 4|(x-1)+yi|^2 > |2x+(2y+1)i|^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4[(x-1)^2 + y^2] > [4x^2 + (2y+1)^2] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 > 4x^2 + 4y^2 + 4y + 1 \Leftrightarrow 8x + 4y - 3 < 0.$$

■ **Esercizio 3.46.** *Si consideri l'insieme di numeri reali*

$$E = \left\{2^{1/n} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}.$$

▶ *Si determinino:*

- $\inf E =$ $1/2$
- $\sup E =$ 2
- *l'insieme dei punti di accumulazione di E:* $\{1\}$
- *l'insieme dei punti isolati di E:* E

▶ *Si dica se esistono* $\min E$ *e* $\max E$.

Esistono $\min E = 1/2$ e $\max E = 2$.

■ **Esercizio 3.47.** *Si provi che l'equazione*

$$e^x = 3x$$

ha almeno due soluzioni positive.

Svolgimento
Per $x < 0$, non esistono soluzioni, dato che i due membri dell'equazione hanno segni opposti. Supponiamo dunque $x \geq 0$. Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = e^x - 3x$; f è continua e si ha

$$f(0) = 1 > 0, \qquad f(1) = e - 3 < 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Per il teorema della permanenza del segno, esiste $c > 1$ tale che $f(c) > 0$ e per il teorema sull'esistenza degli zeri, esistono $a \in]0, 1[$ e $b \in]1, c[$ tali che $f(a) = f(b) = 0$.

■ **Esercizio 3.48.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \sqrt[3]{x - x^3}.$$

▶ *Si determinino:*

- *il dominio di f:* $\quad \operatorname{dom} f = \mathbb{R}$
- *i segni di f:*

  $f(x) > 0$ se $x \in]-\infty, -1[\cup]0, 1[$, $f(x) < 0$ se $x \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[$, $f(x) = 0$ se $x \in \{-1, 0, 1\}$;

- *i limiti di f:*

  $$* \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad * \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

- *la derivata prima di f:*

  $$f'(x) = \frac{1 - 3x^2}{3\sqrt[3]{(x - x^3)^2}}, \quad \text{se } x \notin \{-1, 0, 1\};$$
  $$f'(-1) = -\infty, \quad f'(0) = +\infty, \quad f'(1) = -\infty$$

• *limiti di f':*

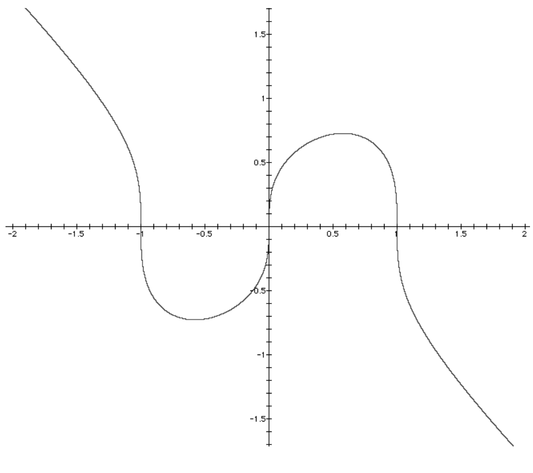
$$* \lim_{x\to-\infty} f'(x) = -1 \qquad\qquad * \lim_{x\to+\infty} f'(x) = -1$$

• *i segni di f':*

$f'(x) > 0$ se $x \in]-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}[$; $f'(x) < 0$ se $x \in]-\infty, -1/\sqrt{3}[\cup$ $]1/\sqrt{3}, +\infty[$

• *la crescenza, la decrescenza, gli estremi relativi e assoluti di f:*

f è strettamente crescente su $]-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}[$; f è strettamente decrescente su $]-\infty, -1/\sqrt{3}[$ e su $]1/\sqrt{3}, +\infty[$; $-1/\sqrt{3}$ è punto di minimo relativo, con $f(-1/\sqrt{3}) = -\sqrt[3]{2}/\sqrt{3}$; $1/\sqrt{3}$ è punto di massimo relativo, con $f(1/\sqrt{3}) = \sqrt[3]{2}/\sqrt{3}$; $\inf f = -\infty$; $\sup f = +\infty$.



► *Si determini, al variare di $t \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$.*

$t < -\sqrt[3]{2}/\sqrt{3}$:	1 soluzione,
$t = -\sqrt[3]{2}/\sqrt{3}$:	2 soluzioni,
$-\sqrt[3]{2}/\sqrt{3} < t < \sqrt[3]{2}/\sqrt{3}$:	3 soluzioni,
$t = \sqrt[3]{2}/\sqrt{3}$:	2 soluzioni,
$t > \sqrt[3]{2}/\sqrt{3}$:	1 soluzione.

■ **Esercizio 3.49.** *Si calcoli*

$$\int_1^2 \frac{\arctan x}{x^2}\, dx.$$

Risultato

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan 2 + \frac{1}{2}\log\frac{8}{5}$$

Svolgimento
Integrando per parti, si ha

$$\int_1^2 \frac{\arctan x}{x^2} dx = \left[-\frac{\arctan x}{x}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x(1+x^2)} dx =$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan 2 + \int_1^2 \frac{1}{x(1+x^2)} dx.$$

Essendo

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2},$$

si ottiene

$$\int_1^2 \frac{\arctan x}{x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan 2 + \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x}{1+x^2} dx =$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan 2 + [\log x]_1^2 - \frac{1}{2}\left[\log(1+x^2)\right]_1^2 =$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan 2 + \log 2 - 0 - \frac{1}{2}\log 5 + \frac{1}{2}\log 2 =$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan 2 + \frac{1}{2}\log\frac{8}{5}.$$

■ **Esercizio 3.50.** *Si consideri, per $x \in]0, 2\pi[$, la funzione*

$$f(x) = \int_0^{x^2} e^t \cos(\sqrt{t})\, dt.$$

▶ *Si determinino:*

- $f'(x) = \quad 2xe^{x^2}\cos x$
- $f''(x) = \quad 2e^{x^2}[(1+2x^2)\cos x - x\sin x]$

▶ *Si usi il test della derivata seconda per studiare la natura dei punti critici di f.*

La derivata prima si annulla nei punti $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$. Essendo $f''(\frac{\pi}{2}) < 0$ e $f''(\frac{3}{2}\pi) > 0$, si conclude che $\frac{3}{2}\pi$ è punto di minimo relativo, mentre $\frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo.

3.2.4 7 giugno 2004

■ **Esercizio 3.51.** *Si determinino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione*

$$z^2 + \bar{z} + 1 = 0,$$

dove $\bar{z}$ indica il coniugato del numero complesso z.

Risultato

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\,i; \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\,i$$

Svolgimento
Posto $z = x + yi$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$z^2 + \bar{z} + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi + x - yi + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x + 1 = 0 \\ 2xy - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x + 1 = 0 \\ y(2x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1/2 \\ y^2 = 7/4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{7}. \end{cases}$$

■ **Esercizio 3.52.** *Si consideri l'insieme di numeri reali*

$$E = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

▶ *Si determinino:*

- $\inf E =$ $\qquad$ $1/e$

- $\sup E =$ $1/2$
- *l'insieme dei punti di accumulazione di E:* $\{1/e\}$
- *l'insieme dei punti isolati di E:* E
- *l'insieme dei punti interni di E:* $\emptyset$

▶ *Si dica se esistono* $\min E$ *e* $\max E$.

Non esiste $\min E$, esiste $\max E = 1/2$.

■ **Esercizio 3.53.** *Si calcoli, facendo uso dei limiti notevoli,*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[5]{2+x} - \sqrt[5]{1+x}}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^4}}}.$$

Risultato

$$\frac{1}{5}$$

Svolgimento
Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[5]{2+x} - \sqrt[5]{1+x}}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^4}}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[5]{1+x}\,\frac{\sqrt[5]{\frac{2+x}{1+x}} - 1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^4}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[5]{1+\frac{1}{1+x}} - 1}{\frac{1}{1+x}} \cdot \frac{\sqrt[5]{1+x}}{1+x} \cdot \sqrt[5]{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[5]{1+\frac{1}{1+x}} - 1}{\frac{1}{1+x}} \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{x}{1+x}\right)^4} = \frac{1}{5},$$

poichè $\lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{1/5}-1}{t} = 1/5$.

■ **Esercizio 3.54.** *Si consideri la funzione* $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1.$$

▶ *Si determinino:*

- *la derivata prima di f:*

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

- *i segni di f':*

$f'(x) > 0$ se $x \in [-2, -1[\cup]1/3, 1]$; $f'(x) < 0$ se $x \in]-1, 1/3[$; $f'(-1) = f'(1/3) = 0$

- *la crescenza, la decrescenza, gli estremi relativi e assoluti di f:*

f è strettamente crescente su $[-2, -1[$ e su $]1/3, 1]$; f è strettamente decrescente su $]-1, 1/3[$; -2 e $1/3$ sono punti di minimo relativo; -1 e 1 sono punti di massimo relativo; $\min f = f(-2) = -1$; $\max f = f(-1) = f(1) = 2$.

▶ *Si verifichi che la funzione f ammette esattamente uno zero nell'intervallo $[-2, 1]$.*

Poiché f è continua in $[-2, -1]$, con $f(-2) < 0 < f(-1)$, il teorema di esistenza degli zeri garantisce l'esistenza di $\xi \in]-2, -1[$ tale che $f(\xi) = 0$. Poiché f è strettamente crescente in $[-2, -1[$ e $f(x) > 0$ in $[-1, 1]$, si conclude che f si annulla in uno e un solo punto dell'intervallo $[-2, 1]$.

▶ *Si determinino:*

- *la derivata seconda di f:*

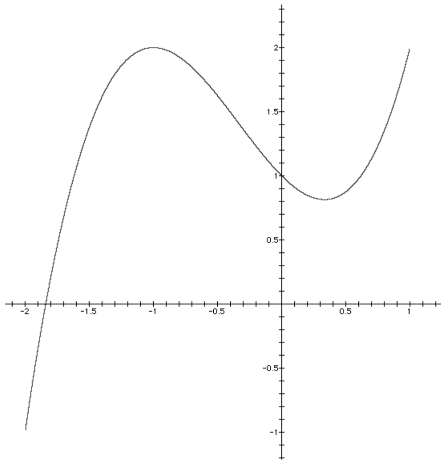
$$f''(x) = 6x + 2$$

- *i segni di f'':*

$f''(x) < 0$ se $x \in [-2, -1/3[$; $f''(-1/3) = 0$; $f''(x) > 0$ se $x \in]-1/3, 1]$.

- *la concavità, la convessità, i punti di flesso di f:*

f è concava in $[-2, -1/3[$; f è convessa in $]-1/3, 1]$; $-1/3$ è punto di flesso ascendente.



■ **Esercizio 3.55.** *Si calcoli l'integrale generalizzato*

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - \int_0^t s\, e^{-s}\, ds\right) dt.$$

Risultato

$$2$$

Svolgimento
Si ha

$$\int_0^t s\, e^{-s}\, ds = 1 - te^{-t} - e^{-t}$$

e

$$\int_0^x \left(1 - \int_0^t s\, e^{-s}\, ds\right) dt = \int_0^x \left(1 + te^{-t} + e^{-t} - 1\right) dt =$$
$$= \left[-te^{-t} - 2e^{-t}\right]_0^x = 2 - xe^{-x} - 2e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2.$$

■ **Esercizio 3.56.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_0^{2x} \sin(t^2)\,dt.$$

▶ *Si determinino:*

- $f'(x) \quad = \quad 2\sin(4x^2)$
- $f''(x) \quad = \quad 16\ x\cos(4x^2)$
- $f'''(x) = \quad 16\cos(4x^2) - 128\ x^2\sin(4x^2)$

▶ *Si determini il polinomio di Taylor $p_{3,0}$ di ordine 3 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione f.*

Si ha

$$p_{3,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = \frac{8}{3}x^3.$$

▶ *Si determini* $\operatorname{ord}_0 f$.

Poiché

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - p_{3,0}(x)}{x^3} = 0,$$

si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{8}{3}$$

e quindi

$$\operatorname{ord}_0 f = 3.$$

3.2.5 28 GIUGNO 2004

■ **Esercizio 3.57.** *Si determini l'insieme E delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione*

$$2z^5 = i\,\bar{z},$$

dove $\bar{z}$ indica il coniugato del numero complesso z.

Risultato

$$E = \left\{ \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(\tfrac{\pi}{12} + k\tfrac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\tfrac{\pi}{12} + k\tfrac{\pi}{3}\right)\right],\ k = 0,1,2,\dots,5 \right\} \cup \{0\}$$

Svolgimento
Usando la rappresentazione polare $z = [\rho, \vartheta]$, con $\rho \geq 0$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$, si ha

$$2z^5 = i\,\bar{z} \Leftrightarrow [2,0][\rho^5, 5\vartheta] = [1, {}^{\pi}\!/_{2}][\rho, -\vartheta] \Leftrightarrow [2\rho^5, 5\vartheta] = [\rho, {}^{\pi}\!/_{2} - \vartheta] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\rho^5 = \rho \\ 5\vartheta = {}^{\pi}\!/_{2} - \vartheta + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho(2\rho^4 - 1) = 0 \\ 6\vartheta = {}^{\pi}\!/_{2} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\rho = 0) \vee \begin{cases} \rho = {}^{1}\!/_{\sqrt[4]{2}} \\ \vartheta = {}^{\pi}\!/_{12} + k{}^{\pi}\!/_{3}\ (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Le soluzioni non nulle distinte si ottengono per $k \in \{0,1,2,\dots,5\}$.

■ **Esercizio 3.58.** *Si consideri l'insieme di numeri reali*

$$E = \left\{ \frac{1}{m - \sqrt{2}} : m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

▶ *Si determinino:*

- $\inf E =$ $\qquad \dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$
- $\sup E =$ $\qquad \dfrac{1}{2-\sqrt{2}}$
- *l'insieme dei punti di accumulazione di E:* $\{0\}$
- *l'insieme dei punti isolati di E:* E
- *l'insieme dei punti interni di E:* $\emptyset$

▶ *Si dica se esistono* $\min E$ *e* $\max E$.

Esistono $\min E = \frac{1}{1-\sqrt{2}}$ e $\max E = \frac{1}{2-\sqrt{2}}$.

■ **Esercizio 3.59.** *Si calcoli, facendo uso dei limiti notevoli,*

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - 2^{\cos x}}{x \sin(3x)}.$$

Risultato

$$\frac{1}{3}\log 2$$

Svolgimento
Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-2^{\cos x}}{x\sin(3x)} = \lim_{x\to 0}\left(2^{\cos x}\cdot\frac{2^{1-\cos x}-1}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{3x}{\sin(3x)}\cdot\frac{1}{3}\right) =$$
$$= 2\log 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\log 2.$$

■ **Esercizio 3.60.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{x} + \log x.$$

▶ *Si determinino:*

- *il dominio di f:*

$$\operatorname{dom} f = \{x : x > 0\}$$

- *i limiti di f:*

  $*\ \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $*\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- *la derivata prima di f:*

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$$

- *i segni di f':*

  $f'(x) > 0$ per $x > 1$, $f'(x) < 0$ per $0 < x < 1$, $f'(1) = 0$.

- *la crescenza, la decrescenza, gli estremi relativi e assoluti di f:*

  f è strettamente crescente su $]1, +\infty[$, f è strettamente decrescente su $]0, 1[$, 1 è punto di minimo relativo; $\min f = f(1) = 1$, $\sup f = +\infty$.

▶ *Si verifichi che la funzione f è positiva sul suo dominio.*

Poiché il minimo assoluto di f è 1, si ha $f(x) > 0$ per ogni $x \in \operatorname{dom} f$.

▶ *Si determinino:*

- *la derivata seconda di f:*

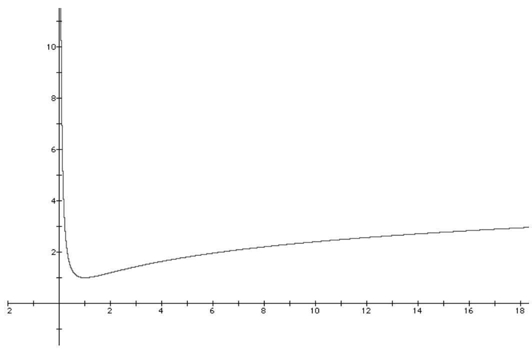
$$f''(x) = \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}$$

- *i segni di f'':*

$f''(x) > 0$ per $0 < x < 2$; $f''(x) < 0$ per $x > 2$; $f''(2) = 0$.

- *la concavità, la convessità, i punti di flesso di f:*

f è convessa in $]0, 2[$, è concava in $]2, +\infty[$; il punto 2 è di flesso discendente.



■ **Esercizio 3.61.** *Si determinino tutte le primitive sull'intervallo* $[1, +\infty[$ *della funzione*

$$f(x) = \int_1^x 4t \log t \, dt.$$

Risultato

$$\frac{2}{3}x^3 \log x - \frac{5}{9}x^3 + x + c, \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

Svolgimento
Si ha, per $x \geq 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^x 4t \log t \, dt = \left[2t^2 \log t\right]_1^x - \int_1^x 2t \, dt = \\ &= 2x^2 \log x - \left[t^2\right]_1^x = 2x^2 \log x - x^2 + 1 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int (2x^2 \log x - x^2 + 1)dx = \\ = \frac{2}{3}x^3 \log x - \frac{2}{3}\int x^2 \, dx - \frac{x^3}{3} + x &= \frac{2}{3}x^3 \log x - \frac{2}{9}x^3 - \frac{x^3}{3} + x + c = \\ &= \frac{2}{3}x^3 \log x - \frac{5}{9}x^3 + x + c, \end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

■ **Esercizio 3.62.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = x - \int_x^{2x} e^{\arctan t} \, dt.$$

▶ *Si determinino:*

- *la derivata prima di f:*

$$f'(x) = 1 - 2e^{\arctan(2x)} + e^{\arctan x}$$

- *la derivata seconda di f:*

$$f''(x) = -\frac{4}{1+4x^2}e^{\arctan(2x)} + \frac{1}{1+x^2}e^{\arctan x}$$

▶ *Si determini il polinomio di Taylor $p_{2,0}$ di ordine 2 relativo al punto $x_0 = 0$ della funzione f.*

Essendo $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -3$, si ottiene

$$p_{2,0}(x) = -\frac{3}{2}x^2.$$

▶ *Si determini* $\operatorname{ord}_0 f$.

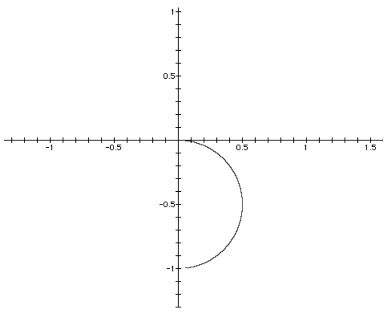
Poiché
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - p_{2,0}(x)}{x^2} = 0,$$
si ha
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = -\frac{3}{2}$$
e quindi
$$\operatorname{ord}_0 f = 2.$$

3.2.6 14 luglio 2004

■ **Esercizio 3.63.** *Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E dei numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che*
$$\frac{iz}{z+i}$$
è un numero reale non negativo.

Risultato

$$E = \left\{x + iy : (x \geq 0) \wedge (x^2 + y^2 + y = 0)\right\}$$



Svolgimento
Posto $z = x + yi$, con $z \neq -i$, si ha
$$\frac{iz}{z+i} = \frac{ix - y}{x + (y+1)i} \cdot \frac{x - (y+1)i}{x - (y+1)i} =$$
$$= \frac{-xy + xy + x + i(x^2 + y^2 + y)}{x^2 + (y+1)^2} = \frac{x + i(x^2 + y^2 + y)}{x^2 + (y+1)^2},$$

che è un numero reale non negativo se e solo se è

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + y^2 + y = 0. \end{cases}$$

■ **Esercizio 3.64.** *Si consideri l'insieme di numeri reali*

$$E = [-1, 0[\cup \mathbb{Q}^+.$$

▶ *Si determinino:*

- $\inf E =$ $\quad -1$
- $\sup E =$ $\quad +\infty$
- *l'insieme dei punti di accumulazione di E:* $\quad [-1, +\infty[\cup \{+\infty\}$
- *l'insieme dei punti isolati di E:* $\quad \emptyset$
- *l'insieme dei punti interni di E:* $\quad]-1, 0[$

▶ *Si dica se esistono* $\min E$ *e* $\max E$.

Esiste $\min E = -1$, non esiste $\max E$.

■ **Esercizio 3.65.** *Si calcoli*

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right).$$

Risultato

$$-1$$

Svolgimento
Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x + 2 - x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 1}} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 1}{|x| \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 1}{-2x} = -1.$$

■ **Esercizio 3.66.** *Si consideri sull'intervallo* $[0, +\infty[$ *la funzione*

$$f(x) = x - 2\arctan x.$$

▶ *Si determinino:*

- *i limiti di* f*:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- *la derivata prima di* f*:*

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

- *i segni di* f'*:*

$f'(x) > 0$ per $x > 1$, $f'(x) < 0$ per $0 \leq x < 1$, $f'(1) = 0$.

- *la crescenza, la decrescenza, gli estremi relativi e assoluti di* f*:*

f è strettamente crescente su $]1, +\infty[$, f è strettamente decrescente su $[0, 1[$, 0 è punto di massimo relativo, 1 è punto di minimo relativo; $\min f = f(1) = 1 - \pi/2$, $\sup f = +\infty$.

▶ *Si provi che* f *si annulla in un solo punto* $x_0 > 0$.

Poiché $f(1) < 0$, $f(x) \geq f(4) > 0$ per $x \geq 4$ e f è continua, esiste, per il teorema di esistenza degli zeri, un punto $x_0 \in]1, 4[$ tale che $f(x_0) = 0$. Poiché f è strettamente decrescente in $[0, 1]$ e $f(0) = 0$, $f(x) < 0$ in $]0, 1]$. Inoltre, f è strettamente strettamente crescente in $[1, +\infty[$ e quindi si annulla nel solo punto x_0.

▶ *Si determini, al variare di* $t \in \mathbb{R}$*, il numero delle soluzioni* $x \in [0, +\infty[$ *dell'equazione* $f(x) = t$.

$t < f(1) = 1 - \pi/2$:	0 soluzione,
$t = 1 - \pi/2$:	1 soluzione,
$1 - \pi/2 < t \leq 0$:	2 soluzioni,
$t > 0$:	1 soluzione.

▶ *Si provi che la funzione* f *ha un asintoto obliquo e lo si determini.*

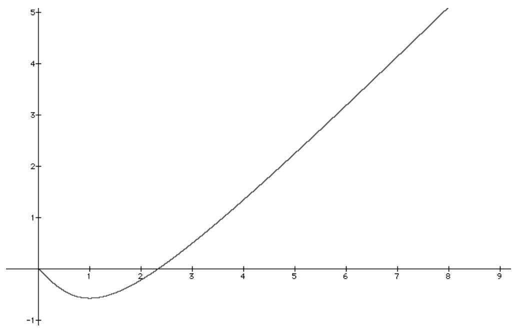
Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[1-\frac{2\arctan x}{x}\right]=1;$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}(-2\arctan x)=-\pi.$$

Quindi f ha un asintoto obliquo a $+\infty$ di equazione

$$y=x-\pi$$



■ **Esercizio 3.67.** *Si calcoli l'integrale generalizzato*

$$\int_0^1 \frac{3^{\sqrt{x}}-\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Risultato

$$\frac{4}{\log 3}-\frac{1}{2}$$

Svolgimento
Si ha

$$\int_c^1 \frac{3^{\sqrt{x}}-\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}\,dx=\int_c^1\frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx-\int_c^1 x\,dx=$$

$$=\left[\frac{2}{\log 3}3^{\sqrt{x}}\right]_c^1-\left[\frac{x^2}{2}\right]_c^1=\frac{2}{\log 3}\left(3-3^{\sqrt{c}}\right)-\frac{1}{2}+\frac{c^2}{2}\xrightarrow[c\to 0^+]{}\frac{4}{\log 3}-\frac{1}{2}.$$

■ **Esercizio 3.68.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_x^1 \left(\int_t^{t+1} e^{s^2}\, ds \right) dt.$$

▶ *Si determinino:*

- $f'(x) \;=\; -\int_x^{x+1} e^{s^2}\, ds$
- $f''(x) = \; -e^{(x+1)^2} + e^{x^2}$

▶ *Si studi la convessità, la concavità e l'esistenza di punti di flesso si f.*

Si ha

$$f''(x) = e^{x^2} - e^{x^2+2x+1} = e^{x^2}[1 - e^{2x+1}]$$

e quindi

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^{2x+1} < 1 \Leftrightarrow 2x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1/2,$$
$$f''(1/2) = 0 \; f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > -1/2.$$

Si conclude che f è convessa in $]-\infty, -1/2[$, concava in $]-1/2, +\infty[$ e che il punto $-1/2$ è di flesso discendente.

3.2.7 13 settembre 2004

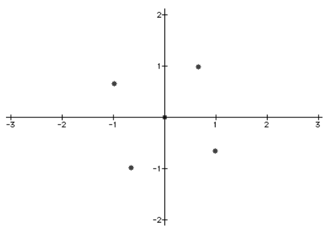
■ **Esercizio 3.69.** *Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme E dei numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che*

$$iz^3 = (1-i)\bar{z},$$

dove $\bar{z}$ indica il coniugato del numero complesso z.

Risultato

$$E = \left\{ \sqrt[4]{2} \left[\cos\left(-\tfrac{3}{16}\pi + k\tfrac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\tfrac{3}{16}\pi + k\tfrac{\pi}{2}\right) \right], k = 0,1,2,3 \right\} \cup \{0\}$$



Svolgimento
Usando la rappresentazione polare $z = [\rho, \vartheta]$, con $\rho \geq 0$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$, si ha

$$iz^3 = (1-i)\bar{z} \Leftrightarrow \left[1, \frac{\pi}{2}\right] \left[\rho^3, 3\vartheta\right] = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right] [\rho, -\vartheta] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\rho^3, \frac{\pi}{2} + 3\vartheta\right] = \left[\sqrt{2}\rho, -\frac{\pi}{4} - \vartheta\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = \sqrt{2}\rho \\ \frac{\pi}{2} + 3\vartheta = -\frac{\pi}{4} - \vartheta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho(\rho^2 - \sqrt{2}) = 0 \\ 4\vartheta = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\rho = 0) \vee \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \vartheta = -\frac{3}{16}\pi + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Le soluzioni distinte si ottengono per $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

■ **Esercizio 3.70.** *Si consideri l'insieme di numeri reali*

$$E = \left\{n^{-m} : (n \in \mathbb{N}^+) \wedge (m \in -1, 0, 1)\right\}.$$

▶ *Si determinino:*

- $\inf E =$ 0
- $\sup E =$ $+\infty$
- *l'insieme dei punti di accumulazione di E:* $\{0, +\infty\}$
- *l'insieme dei punti isolati di E:* E
- *l'insieme dei punti interni di E:* $\emptyset$

▶ *Si dica se esistono* $\min E$ *e* $\max E$.

Non esistono né $\min E$ né $\max E$.

■ **Esercizio 3.71.** *Si calcoli, facendo uso dei limiti notevoli,*

$$\lim_{n \to +\infty} n \left(\sqrt[n]{2} - \sqrt[n]{3}\right).$$

Risultato

$$\log \frac{2}{3}$$

Svolgimento
Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{2}-\sqrt[n]{3}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{1/n}-3^{1/n}\pm 1}{{}^1\!/_n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{1/n}-1}{{}^1\!/_n} + \lim_{n\to+\infty} \frac{1-3^{1/n}}{{}^1\!/_n} = \log 2 - \log 3.$$

■ **Esercizio 3.72.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \arctan(2\sin x - 3x).$$

▶ *Si determinino:*

- *il dominio e le simmetrie di f:*

  $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$; f è dispari;

- *i limiti di f:*

  $$* \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \qquad * \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

- *la derivata prima di f:*

  $$f'(x) = \frac{2\cos x - 3}{1+(2\sin x - 3x)^2}$$

- *i segni di f':*

  si ha $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

- *la crescenza, la decrescenza, gli estremi relativi e assoluti di f:*

  f è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$; $\inf f = -{}^\pi\!/_2$; $\sup f = {}^\pi\!/_2$.

- *i segni di f:*

  si ha $f(x) > 0$ per $x < 0$, $f(x) < 0$ per $x > 0$, $f(0) = 0$.

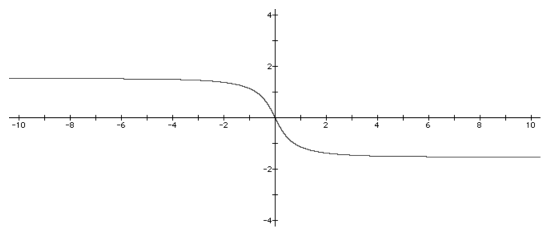
► *Si provi che f è invertibile e si determini il dominio della funzione inversa f^{-1}.*

Essendo strettamente decrescente, f è iniettiva e quindi invertibile. Poiché f è continua su un intervallo, l'insieme immagine $\operatorname{im} f$ è un intervallo e $\operatorname{im} f =]-\pi/2, \pi/2[$. In fine si ha $\operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{im} f =]-\pi/2, \pi/2[$.

► *Si calcoli $(f^{-1})'(0)$:*

Si ha

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = -1.$$



■ **Esercizio 3.73.** *Si calcoli*

$$\int_1^e \left(\int_x^1 t \log t \, dt \right) dx.$$

Risultato

$$-\frac{e^3}{36} - \frac{e}{4} + \frac{1}{9}.$$

Svolgimento
Si ha

$$\int_x^1 t \log t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \log t \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t}{2} \, dt = -\frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{4} + \frac{x^2}{4}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int_1^e \left(\int_x^1 t\log t\,dt\right)dx &= \int_1^e \left(-\frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{4} + \frac{x^2}{4}\right)dx = \\ &= -\left[\frac{x^3}{6}\log x\right]_1^e + \int_1^e \frac{x^2}{6}\,dx + \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x}{4}\right]_1^e = \\ &= -\frac{e^3}{6} + \left[\frac{x^3}{18}\right]_1^e + \frac{e^3-1}{12} - \frac{e-1}{4} = -\frac{e^3}{36} - \frac{e}{4} + \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

■ **Esercizio 3.74.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = x - \int_0^x \frac{\arcsin t}{t}\,dt$$

e si provi che è $\mathrm{ord}_0 f = 3$.

Svolgimento
Si ha, usando il teorema di de L'Hospital,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{x - \int_0^x \frac{\arcsin t}{t}\,dt}{x^3} = -\frac{1}{18} \Leftarrow \\ \Leftarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\arcsin x}{x}}{3x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{3x^3} = -\frac{1}{18} \Leftarrow \\ \Leftarrow \frac{1}{9}\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{x^2} &= \frac{1}{9}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \\ = \frac{1}{9}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{1}{9}\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}+1} = -\frac{1}{18}\end{aligned}$$

e quindi

$$\mathrm{ord}_0 f = 3.$$