Esame di Analisi Matematica I : teoria
Corso prof. OMARI

A.a. 2000–2001, sessione autunnale, I appello.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________________

Si diano le seguenti definizioni (o enunciati) :

1. Principio di induzione.
2. Proprietà di Dedekind.
3. Definizione di valore assoluto e sue proprietà.
4. Definizione di estremo superiore e sue proprietà caratteristiche.
5. Forma cartesiana e forma polare di un numero complesso; modulo, argomento e operazione di coniugio.
6. Definizione di prodotto di due numeri complessi e formula di de Moivre.
7. Permutazioni, disposizioni, combinazioni.
8. Formula di Newton per lo sviluppo della potenza di un binomio.
9. Definizione di punto di accumulazione, punto interno e punto di frontiera.
10. Definizione di chiusura di un insieme, di insieme chiuso e di insieme aperto.
11. Definizione di limite finito per una successione.
12. Definizione di radice $n-$esima di un numero reale.
13. Definizione di potenza con esponente reale.
14. Definizione delle funzioni $\arcsin, \arccos, \mathrm{arctg}$.
15. Definizione della funzione logaritmo.
16. Definizione delle funzioni iperboliche.
17. Principio di identità dei polinomi.
18. Fattorizzazione dei polinomi a coefficienti reali in $\mathbb{R}$.
19. Definizione di funzione continua in un punto.
20. Definizione di funzione discontinua in un punto.
21. Definizione di funzione uniformemente continua su un insieme.
22. Definizione di insieme connesso, di insieme limitato e di insieme compatto.
23. Definizione di $\lim_{x\to \quad} \quad f(x) = \quad$.
24. Definizione di derivata e di funzione derivabile in un punto.
25. Definizione di approssimante lineare, di differenziale e di retta tangente.
26. Regola di derivazione della funzione inversa.
27. Definizione di funzione crescente in un punto e di funzione crescente su un insieme.
28. Definizione di punto di minimo relativo.
29. Ordini di infinito e loro confronto.
30. Polinomio approssimante di Taylor–McLaurin di ordine n di $e^x, \sin x, \cos x, \log(1+x), (1+x)^\alpha$.
31. Definizione di funzione convessa in un punto.
32. Definizione di punto di flesso.
33. Definizione di primitiva di una funzione su un intervallo e caratterizzazione dell'insieme delle primitive.
34. Metodo di Hermite per l'integrazione delle funzioni razionali.
35. Definizione di somme superiori e inferiori e di funzione integrabile secondo Riemann.
36. Proprietà di linearità dell'integrale e regola di Chasles.
37. Funzione localmente integrabile su un intervallo, funzione integrale e sue proprietà.
38. Regole di integrazione per parti e per sostituzione per l'integrale di Riemann.
39. Definizione di integrale generalizzato su un intervallo $[a, b[$ e su un intervallo $]a, b[$.
40. Criterio del confronto per l'integrale generalizzato.

Si dimostrino i seguenti teoremi:

1. Teorema di esistenza dell'estremo superiore.
2. Teorema di Cantor sugli intervalli incapsulati.
3. Proprietà di Archimede.
4. Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.
5. Esistenza delle radici $n-$esime di un numero complesso.
6. Proprietà della funzione esponenziale : limiti, continuità, invertibilità.
7. Proprietà della funzione logaritmo : limiti, proprietà algebriche, cambiamento di base.
8. Teorema della permanenza del segno e della limitatezza locale.
9. Teorema di continuità della somma, del prodotto, della reciproca.
10. Teorema di esistenza degli zeri e metodo di bisezione.
11. Teorema di compattezza.
12. Teorema di Weierstrass.
13. Teorema di continuità della funzione inversa.
14. Teorema sul limite della funzione composta.
15. Teorema sull'esistenza del $\lim_{x\to x_0}(f(x) \quad g(x))$, con $\lim_{x\to x_0} f(x) = \quad$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \quad$.
16. Teorema sul limite delle funzioni monotone.
17. Esistenza del $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
18. Esistenza del $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^p}$ $(a>1, p>0)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^p}$ $(0<a\neq 1, p>0)$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$.
19. Derivabilità di $\sin x$ e di $\cos x$.
20. Derivabilità di a^x e di x^x.
21. Derivabilità di $\log_a x$.
22. Derivabilità di $\arcsin x$ e di $\arccos x$.
23. Derivabilità di $\mathrm{tg}\, x$ e di $\mathrm{arctg}\, x$.
24. Derivabilità di x^α e di x^x.
25. Derivabilità e continuità.
26. Teorema di derivazione della funzione composta.
27. Derivabilità ed esistenza dell'approssimante lineare.
28. Segno di $f'(x_0)$ e crescenza di f in x_0.
29. Test della derivata prima per l'esistenza di un punto di estremo (teorema di Fermat).
30. Teorema di Rolle.
31. Teorema di Cauchy e teorema di Lagrange.
32. Teorema di de l'Hospital (caso $\frac{0}{0}$).
33. Teorema sul limite della derivata.
34. Lemma di Peano.
35. Teorema di Taylor.
36. Segno di $f''(x_0)$ e convessità di f in x_0.
37. Test della derivata seconda per l'esistenza di un punto di estremo.
38. Condizioni su $f''(x_0)$ e $f'''(x_0)$ ed esistenza di un flesso per f in x_0.
39. Integrabilità delle funzioni continue.
40. Integrabilità delle funzioni monotone.
41. Monotonia dell'integrale.
42. Teorema della media integrale.
43. Teorema fondamentale del calcolo.
44. Teorema di Torricelli.
45. Criterio dell'ordine di infinitesimo per l'esistenza dell'integrale generalizzato su $[a, +\infty[$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

I DEFINIZIONE

II DEFINIZIONE

ENUNCIATO DEL I TEOREMA

ENUNCIATO DEL II TEOREMA

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

DIMOSTRAZIONE DEL I TEOREMA

DIMOSTRAZIONE DEL II TEOREMA