Prova scritta di Analisi matematica I

Corso: OMARI ○ TIRONI ○

Sessione invernale, III appello, a.a. 1999-2000. Trieste, 7 febbraio 2000

COGNOME e NOME ______________________	**N. Matricola** __________
Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________	
	VOTO ______

ESERCIZIO N. 1. In un reparto ospedaliero ci sono 2 stanze, ciascuna dotata di 4 letti. In quanti modi 7 pazienti possono essere sistemati in quelle stanze?

RISULTATO

40.320

SVOLGIMENTO

Si hanno:

2 modi di scegliere la stanza con tre pazienti,

4 modi di scegliere il letto che resta vuoto,

7! modi di disporre i sette pazienti.

In conclusione:

$$2 \cdot 4 \cdot 7! = 8!$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$

$$E = \left\{-1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\} \cup \mathbb{Q}^+.$$

Si determinino :

- $\inf E =$ -1

- $\sup E =$ $+\infty$

- l'insieme dei punti di accumulazione di E : $\{-1\} \cup [0, +\infty[$.

- $\mathrm{int} E =$ $\emptyset$

- $\mathrm{cl} E =$ $\{-1\} \cup \{-1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\} \cup]0, +\infty[$.

NB: cl$E$ indica la chiusura dell'insieme E; int$E$ indica la parte interna di E, fr$E$ indica la frontiera di E e $\mathcal{C}E$ il complementare di E.

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

ESERCIZIO N. 3. Sia

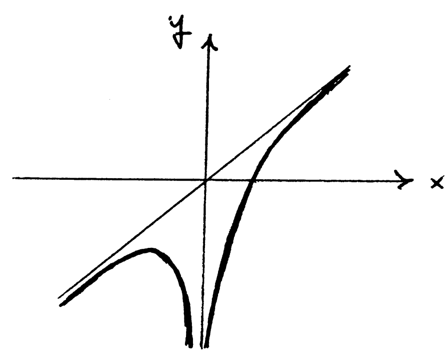
$$f(x) = x + \log\left(\frac{|x|}{|x|+1}\right).$$

(i) Si determinino:

- il dominio di f : $\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} & \text{se } x>0 \\ 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x^2-x-1}{x(x-1)} & \text{se } x<0 \end{cases}$
- $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 1$ $\quad \lim_{x\to 0-} f'(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x\to 0+} f'(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$
- i segni di f' :
  $f'(x) > 0$ se $x < \frac{1-\sqrt5}{2} \vee x>0$; $f'\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right) = 0$;
  $f'(x) < 0$ se $\frac{1-\sqrt5}{2} < x < 0$
- la crescenza, la decrescenza e gli estremi di f :
  f è crescente se $x < \frac{1-\sqrt5}{2} \vee x > 0$; f è decrescente se $\frac{1-\sqrt5}{2} < x < 0$;
  $\frac{1-\sqrt5}{2}$ è pto di max. rel. ; $\sup f = +\infty$; $\inf f = -\infty$.
- i segni di f :
  $f(x) < 0$ se $x<0$ (essendo $f\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right) < 0$) ; esiste $\alpha > 0$ tc
  $f(x) < 0$ se $0 < x < \alpha$, $f(\alpha) = 0$, $f(x) > 0$ se $x > \alpha$.
- l'equazione dell'asintoto a ∞ di f :
  $y = x$, poiché $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = 0$.

(ii) Si utilizzino i risultati precedenti per stabilire il numero delle soluzioni $x \in \mathrm{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

- $t < f\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)$: 3 sol.
- $t = f\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)$: 2 sol.
- $t > f\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)$: 1 sol.



ESERCIZIO N. 4. Sia, per ogni $x > 0$,

$$f(x) = \int_0^x t\, e^{\sqrt{t}}\, dt.$$

Si determinino :

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, infatti :

$$f(x) = \int_0^x t e^{\sqrt{t}}\, dt \geq \int_0^x t \cdot 1\, dt = \frac{x^2}{2} \to +\infty \quad \text{se } x \to +\infty$$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$, infatti :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x+1) = +\infty$ e quindi per il teor. di de L'Hospital si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x+1)}{f'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} e^{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}} = 1$$

- $\lim_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = +\infty$, infatti :

$$f(x+1) - f(x) = \int_x^{x+1} t e^{\sqrt{t}}\, dt \geq \int_x^{x+1} t \cdot 1\, dt = x + \frac{1}{2} \to +\infty$$

se $x \to +\infty$.

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

ESERCIZIO N. 5. Si dica per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta

$$\mathrm{ord}_0\left(\mathrm{arctg}\, x - \sin x + \alpha x^3\right) > 3.$$

RISULTATO

$\alpha = \frac{1}{6}$

SVOLGIMENTO

Posto $f(x) = \mathrm{arctg}\, x - \sin x + \alpha x^3$, si ha:

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \cos x + 3\alpha x^2$ e $f'(0) = 0$,

$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} + \sin x + 6\alpha x$ e $f''(0) = 0$,

$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} + \cos x + 6\alpha$ e $f'''(0) = -1 + 6\alpha$.

Quindi per il lemma di Peano risulta:

$\mathrm{ord}_0 f(x) > 3$ se e solo se $-1+6\alpha = 0$, cioè $\alpha = \frac{1}{6}$