Prova scritta di Analisi matematica I

Corso: OMARI ○ TIRONI ○

Sessione estiva, I appello, a.a. 1999-2000. Trieste, 5 giugno 2000

COGNOME e NOME ______		N. Matricola ______	
Anno di Corso ______	Laurea in Ingegneria ______		
Appello in cui si intende sostenere la prova orale :	I ○ II ○ III ○	VOTO ______	

ESERCIZIO N. 1. Si ponga, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = z \cdot \bar{z} + \frac{z + \bar{z}}{2} - 1,$$

dove $\bar{z}$ indica il coniugato del numero complesso z.

(i) Si provi che $f(z) \in \mathbb{R}$, per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Se $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, allora

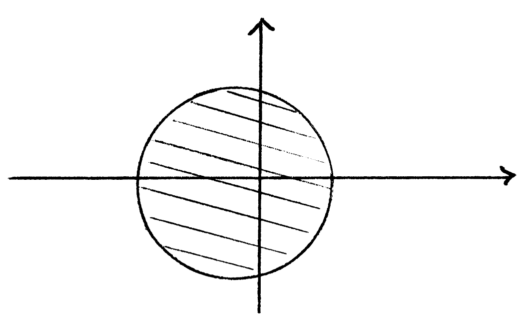
$$f(z) = x^2 + y^2 + x - 1 \in \mathbb{R}.$$

(ii) Si determini l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) \leq 0$ e lo si rappresenti nel piano di Gauss.

Si ha

$$f(z) = x^2 + y^2 + x - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{5}{4} \leq 0$$

se e solo se z appartiene al cerchio chiuso di centro $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e raggio $\frac{\sqrt{5}}{2}$.



ESERCIZIO N. 2. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$

$$E = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \geq 2\}.$$

Si determinino :

- $\mathrm{cl}E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2\} =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$, essendo

$$E = (]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[) \cap \mathbb{Q}.$$

- $\mathrm{int}E = \emptyset$

- $\mathrm{fr}E = \mathrm{cl}\, E$

- $\mathrm{int}(\mathcal{C}E) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\} =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, essendo

$$\mathcal{C}E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 \geq 2\}$$

- $\mathrm{cl}(\mathcal{C}E) = \mathbb{R}$

NB: $\mathrm{cl}E$ indica la chiusura dell'insieme E; $\mathrm{int}E$ indica la parte interna di E, $\mathrm{fr}E$ indica la frontiera di E e $\mathcal{C}E$ il complementare di E.

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Sia, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$,

$$f_k(x) = \frac{k}{|x-k|+1}.$$

Si determinino, per ogni fissato $k \in \mathbb{R}$:

- il dominio e i segni di f_k : dom $f_k = \mathbb{R}$;
  - $k = 0$: $f_k(x) = 0$ per ogni x ;
  - $k < 0$: $f_k(x) < 0$ per ogni x ;
  - $k > 0$: $f_k(x) > 0$ per ogni x .
- $\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = 0$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} f_k(x) = 0$
- $f'_k(x)$
  - $k = 0$: $f'_k(x) = 0$ per ogni x ;
  - $k \neq 0$: $f'_k(x) = \dfrac{-k \cdot \operatorname{sign}(x-k)}{(|x-k|+1)^2}$ per ogni $x \neq k$.
- $\lim_{x \to k^-} f'_k(x) = k$ $\qquad \lim_{x \to k^+} f'_k(x) = -k$
- i segni di f'_k :
  - $k = 0$: $f'_k(x) = 0$ per ogni x ;
  - $k < 0$: $f'_k(x) < 0$ per ogni $x < k$, $f'_k(x) > 0$ per ogni $x > k$;
  - $k > 0$: $f'_k(x) > 0$ per ogni $x < k$, $f'_k(x) < 0$ per ogni $x > k$.
- la crescenza, la decrescenza e gli estremi di f_k :
  - $k = 0$: f_k è costantemente uguale a 0 ;
  - $k < 0$: f_k è decrescente se $x < k$, crescente se $x > k$; $\sup f_k = 0$; $x_k = k$ è pto di minimo assoluto con $f_k(x_k) = k$;
  - $k > 0$: f_k è crescente se $x < k$, decrescente se $x > k$; $\inf f_k = 0$; $x_k = k$ è pto di massimo assoluto con $f_k(x_k) = k$.

ESERCIZIO N. 4. Sia, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_x^{2x} t\, e^{t^2}\, dt.$$

Si determinino :

- $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, poichè per il teorema della media, si ha $\int_x^{2x} t\, e^{t^2} dt = (2x-x)\xi e^{\xi^2} = x\xi e^{\xi^2}$ con ξ compreso tra x e $2x$, e $x\xi e^{\xi^2} \to 0$ se $x \to 0$.

- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, poichè per il teorema della media e la crescenza di $t e^{t^2}$ per $t > 0$, si ha $\int_x^{2x} t e^{t^2} dt = x\xi e^{\xi^2} \geq x^2 e^{x^2} \to +\infty$ se $x \to +\infty$.

- $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{2x} t e^{t^2} dt\right) - \frac{d}{dx}\left(\int_0^{x} t e^{t^2} dt\right) = 2x e^{4x^2}\cdot 2 - x e^{x^2} = \left(4 e^{4x^2} - e^{x^2}\right)\cdot x$

- $\mathrm{ord}_0 f(x) = 2$, per il lemma di Peano, essendo $f(0) = f'(0) = 0$ e $f''(0) = 3$ $\left(f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x}\right)$.

- $\mathrm{Ord}_{+\infty} f(x)$ è soprareale, poichè $f(x) \geq x^2 e^{x^2}$ se $x > 0$.

COGNOME e NOME ______________________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 5. Si determinino tutte le primitive di

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3+x}$$

sull'intervallo $]0, +\infty[$.

- Si effettui la decomposizione di Hermite di f.

- $x^3 + x = x(x^2+1)$: $\alpha = 0$ è radice reale con molt. $\mu = 1$
  $a \pm i b = \pm i$ sono radici complesse con molt. $\nu = 1$

- $\dfrac{x+1}{x^3+x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$;

$$x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + A$$

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ C = 1 \\ A = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1}$$

- Si trovino le primitive di f su $]0, +\infty[$.

$$\int \frac{x+1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \log x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + c$$