Esame di Analisi matematica I : esercizi

Corso: OMARI ◯ TIRONI ◯

A.a. 2000-2001, sessione estiva, I appello.

COGNOME e NOME ________________ **N. Matricola** ________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ________________

Appello in cui si intende sostenere la prova di teoria : I ◯ II ◯ III ◯ VOTO ______

ESERCIZIO N. 1. Si provi che per ogni $t \in \mathbb{R}$, con $t \geq 2$, l'equazione

$$\overline{z} + \frac{1}{z} = it$$

ha almeno una soluzione $z \in \mathbb{C}$. (Come al solito, $\overline{z}$ indica il coniugato del numero complesso z.)

SVOLGIMENTO

Per ogni $z = x + iy \neq 0$ $(x, y \in \mathbb{R})$, si ha

$$\overline{z} + \frac{1}{z} = it \iff z\overline{z} + 1 - itz = 0 \iff$$

$$(x^2 + y^2 + 1 + ty) - itx = 0 \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 + ty = 0 \\ tx = 0 \end{cases}.$$

Avendo supposto $t \geq 2$, il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + ty + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{-t - \sqrt{t^2 - 4}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{-t + \sqrt{t^2 - 4}}{2} \end{cases}.$$

In conclusione, per ogni $t \geq 2$, le soluzioni sono

$$z_1 = -\frac{i}{2}\left(t + \sqrt{t^2 - 4}\right), \qquad z_2 = \frac{i}{2}\left(-t + \sqrt{t^2 - 4}\right).$$

ESERCIZIO N. 2. Sia

$$E =]-\infty, -1] \cup \mathbb{N}.$$

(i) Si determinino :

- $\operatorname{int} E =$ $]-\infty, -1[$
- $\operatorname{cl} E =$ E
- $\operatorname{fr} E =$ $\{-1\} \cup \mathbb{N}$

(ii) Si dica, giustificando la risposta, se E è compatto.

E non è compatto, perché non è limitato.

(iii) Si dica, giustificando la risposta, se E è connesso.

E non è connesso, perché non è un singoletto né un intervallo.

NB: $\operatorname{cl} E$ indica la chiusura dell'insieme E; $\operatorname{int} E$ indica la parte interna di E, $\operatorname{fr} E$ indica la frontiera di E.

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Sia

$$f(x) = \exp\left(-\sqrt{x - x^2}\right).$$

Si determinino:

- il dominio e i segni di f : $\operatorname{dom} f = [0,1]$; $f(x) > 0$ in $\operatorname{dom} f$.
- $f'(x) = e^{-\sqrt{x-x^2}} \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x-x^2}}$ in $]0,1[$.
- $f'(0) = -\infty$ $\qquad f'(1) = +\infty$
- i punti di annullamento e i segni di f' :

$f'(x) < 0$ in $[0, \frac{1}{2}[$; $f'(\frac{1}{2}) = 0$; $f'(x) > 0$ in $]\frac{1}{2}, 1]$.

- la crescenza, la decrescenza e gli estremi di f :

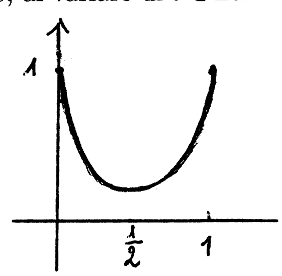
f è decrescente in $[0, \frac{1}{2}[$; f è crescente in $]\frac{1}{2}, 1]$;
$\min f = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}}$; $\max f = f(0) = f(1) = 1$.

- $f''(x) = e^{-\sqrt{x-x^2}} \dfrac{1 + (2x-1)^2\sqrt{x-x^2}}{4(x-x^2)^{3/2}}$ in $]0,1[$
- la concavità e la convessità di f :

$f''(x) > 0$ in $]0,1[$ e quindi f è convessa.

Si determini il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

$t < \frac{1}{\sqrt{e}}$: 0 soluzioni
$t = \frac{1}{\sqrt{e}}$: 1 soluzione
$\frac{1}{\sqrt{e}} < t \leq 1$: 2 soluzioni
$t > 1$: 0 soluzioni



ESERCIZIO N. 4. Si calcoli
$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e+\sqrt{x}}\,dx.$$

RISULTATO

$$1-2e-2e^2+2e^2\log(1+e)$$

SVOLGIMENTO

Si ha, con la sostituzione $x=t^2$,

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e+\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{t}{e+t}\,2t\,dt = 2\int_0^1 \frac{t^2-e^2+e^2}{t+e}\,dt$$

$$= 2\int_0^1 (t-e)\,dt + 2e^2\int_0^1 \frac{1}{t+e}\,dt$$

$$= \Big[(t-e)^2\Big]_0^1 + 2e^2\Big[\log(t+e)\Big]_0^1$$

$$= (1-e)^2 - e^2 + 2e^2\log(e+1) - 2e^2$$

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 5. Si ponga, per ogni $x \geq 1$,

$$f(x) = \int_2^{2x} \frac{1}{\log t}\, dt.$$

Si determinino:

- $\mathrm{ord}_{+\infty} \frac{1}{\log x} =$ sottoreale, perchè $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^p}{\log x} = +\infty$ per ogni $p > 0$.

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) \left(= \int_2^{+\infty} \frac{1}{\log t}\, dt \right) = +\infty$, perchè $\mathrm{ord}_{+\infty} \frac{1}{\log t} \leq 1$.

- $f'(x) = \dfrac{2}{\log(2x)}$

Si provi che f è biiettiva tra $[1, +\infty[$ e $[0, +\infty[$.

- $f'(x) > 0$ in $[1, +\infty[$; quindi f è crescente in $[1, +\infty[$ e dunque f è iniettiva in $[1, +\infty[$.
- $\min f = f(1) = 0$; $\sup f = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; f è continua su $[1, +\infty[$; quindi l'immagine di f è $[0, +\infty[$.

In conclusione, f è biettiva tra $[1, +\infty[$ e $[0, +\infty[$.