Prova scritta di Analisi matematica I

Corso: OMARI ○ TIRONI ○

Appello di dicembre. Trieste, 4 dicembre 2000

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

Anno di Corso ________ Laurea in Ingegneria ______________________

VOTO ________

ESERCIZIO N. 1. Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme dei numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\left|\frac{z-2i}{2z-i}\right| > 1.$$

RISULTATO

$\{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ e } z \neq \frac{i}{2} \}$

SVOLGIMENTO

Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha per $z \neq \frac{i}{2}$:

$$\left|\frac{z-2i}{2z-i}\right| > 1 \iff |z-2i| > |2z-i| \iff$$

$$x^2 + (y-2)^2 > 4x^2 + (2y-1)^2 \iff$$

$$3x^2 + 3y^2 < 3 \iff$$

$$|z| < 1.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$

$$E = \left\{ 1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

Si determinino :

- $\inf E =$ $\min E = 3$
- $\sup E =$ $1 + e$
- $\operatorname{cl} E =$ $E \cup \{1+e\}$
- $\operatorname{int} E =$ $\emptyset$
- $\operatorname{fr} E =$ $E \cup \{1+e\} = \operatorname{cl} E$

NB: $\operatorname{cl} E$ indica la chiusura dell'insieme E; $\operatorname{int} E$ indica la parte interna di E, $\operatorname{fr} E$ indica la frontiera di E.

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Sia

$$f(x) = (2x-1)\log x\,.$$

Si determinino:

- il dominio e i segni di f :

  - $\mathrm{dom} f =]0,+\infty[$
  - $f(x)>0 \iff \begin{cases} 2x-1>0 \\ \log x>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x-1<0 \\ \log x<0 \end{cases} \iff 0<x<\frac{1}{2} \ \vee \ x>1$

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $f'(x) = 2\log x + 2 - \frac{1}{x}$
- $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$
- $f''(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$
- i punti di annullamento e i segni di f' (dopo aver verificato che esiste uno ed un solo $\alpha > 0$ tale che $f'(\alpha) = 0$) :

Poiché $f''(x)>0$ per ogni $x>0$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, esiste (per il teorema di connessione e la crescenza di f') uno e un solo $\alpha>0$ tale che $f'(\alpha)=0$. Inoltre risulta:

$f'(x)<0 \iff 0<x<\alpha$ $\qquad$ e $\qquad$ $f'(x)>0 \iff x>\alpha$

- la crescenza, la decrescenza e gli estremi di f :

f è crescente su $]\alpha,+\infty[$; f è decrescente su $]0,\alpha[$;
f ha min. assoluto in α ; $\sup f = +\infty$.

Si provi che f è convessa.

$f''(x)>0$ per ogni $x>0$ e pertanto f è convessa su $]0,+\infty[$.

ESERCIZIO N. 4. Si determini una primitiva di

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 1}.$$

RISULTATO

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

SVOLGIMENTO

Per la formula di cambiamento di variabili, si ha, posto $y := e^x$,

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1}\,dx = \left(\int \frac{1}{y^2+y+1}\,dy\right)_{y=e^x},$$

con

$$\int \frac{1}{y^2+y+1}\,dy = \int \frac{1}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dy = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}\,dy$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + c$$

Quindi risulta

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 5. Sia

$$f(x) = \int_0^{2x} \left(\int_0^t e^{s^2} ds \right) dt$$

Si determinino:

- $f'(x) =$ $2 \int_0^{2x} e^{s^2} ds$,

essendo $f(x) = g(2x)$ con $g(y) = \int_0^y \left(\int_0^t e^{s^2} ds \right) dt$.

- $f''(x) =$ $4 e^{4x^2}$,

essendo $f'(x) = h(2x)$ con $h(y) = 2 \int_0^y e^{s^2} ds$.

- $\mathrm{ord}_0 f(x) =$ 2, (Si giustifichi la risposta)

essendo $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 4 \neq 0$.