Prova scritta di Analisi matematica I

Corso: OMARI ◯ TIRONI ◯

Sessione estiva, III appello, a.a. 1999-2000. Trieste, 3 luglio 2000

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________

VOTO ________

ESERCIZIO N. 1. Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\frac{\bar{z} - iz}{z + 1 - i} = 0,$$

dove $\bar{z}$ indica il coniugato del numero complesso z.

SVOLGIMENTO

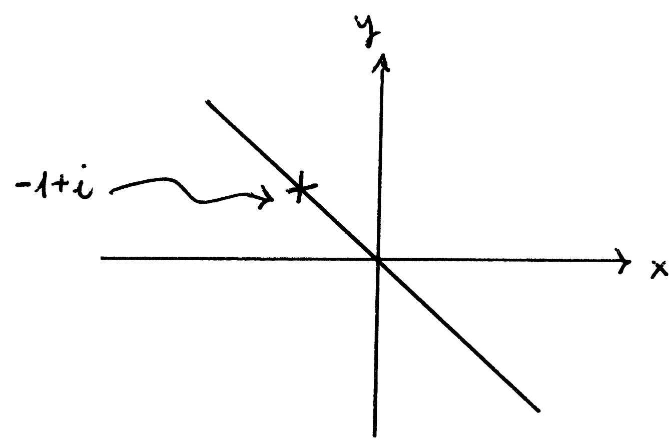
Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\frac{\bar{z} - iz}{z + 1 - i} = 0 \iff$$

$$\begin{cases} x - iy - ix + y = 0 \\ x + iy \neq -1 + i \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} (x+y) + i(-x-y) = 0 \\ x + iy \neq -1 + i \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x \neq -1 \\ y \neq 1 \end{cases}$$



ESERCIZIO N. 2. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$

$$E = \left\{ \pi - \arccos\left(\frac{n}{n+1}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si determinino :

- $\inf E = \frac{\pi}{2} = \pi - \arccos 0 = \min E$,

(la succ. $\left(\pi - \arccos \frac{n}{n+1}\right)_n$ è crescente).

- $\sup E = \lim_{n \to +\infty} \left(\pi - \arccos \frac{n}{n+1}\right) = \pi$.

- i punti di accumulazione di E : l'unico pto di accumulazione di E è $\pi = \sup E \ (\notin E)$.

- $\mathrm{cl}\, E = E \cup \{\pi\}$

- $\mathrm{cl}\,(\mathcal{C}E) = \mathbb{R}$

NB: $\mathrm{cl}\, E$ indica la chiusura dell'insieme E; $\mathrm{int}\, E$ indica la parte interna di E, $\mathrm{fr}\, E$ indica la frontiera di E e $\mathcal{C}E$ il complementare di E.

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

ESERCIZIO N. 3. Sia

$$f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x-1}\,.$$

Si determinino:

- il dominio e i segni di f :

dom $f = \mathbb{R}$; $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (giustificare la risposta)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt[3]{t}} \overset{H}{\Leftarrow} \lim_{t\to 0} \sqrt[3]{\left(\frac{t}{1-t}\right)^2} = 0$$

- $f'(x) =$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right) \quad \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq 1.$$

- $f'(0) = +\infty$ $f'(1) = -\infty$

- i segni di f' :

$f'(x) > 0$ se $x < \frac{1}{2}$; $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; $f'(x) < 0$ se $x > \frac{1}{2}$ $(x \neq 0, x \neq 1)$

- la crescenza, la decrescenza e gli estremi di f :

f è crescente su $]-\infty, \frac{1}{2}[$; f è decrescente su $]\frac{1}{2}, +\infty[$;
$\frac{1}{2}$ è pto di max. ass. con $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; $\inf f = 0$.

- $f''(x) =$

$$-\frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^5}}\right) \quad \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq 1.$$

- i segni di $f''(x)$:

$f''(x) > 0$ se $x < 0$ o $x > 1$; $f''(x) < 0$ se $0 < x < 1$.

- la concavità e la convessità di f :

f è convessa su $]-\infty, 0[$; f è concava su $]0, 1[$;
f è convessa su $]1, +\infty[$.

ESERCIZIO N. 4. Si ponga, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f_\alpha(x) = x^\alpha \log x.$$

(i) Si determini, distinguendo il caso $\alpha = -1$ dal caso $\alpha \neq -1$, una primitiva di f_α.

- $\alpha = -1$:

$$\int \frac{\log x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\log x)^2 + c$$

- $\alpha \neq -1$:

$$\int x^\alpha \log x\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\log x - \frac{1}{\alpha+1}\int x^\alpha\,dx =$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\log x - \frac{1}{\alpha+1}\right) + c$$

(ii) Si calcoli $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$.

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x f_\alpha(t)\,dt =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}(\log x)^2 = +\infty & \text{se } \alpha = -1 \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\log x - \frac{1}{\alpha+1}\right) + \frac{1}{(\alpha+1)^2}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > -1 \\ \dfrac{1}{(\alpha+1)^2} & \text{se } \alpha < -1 \end{cases} \end{cases}$$

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 5. Si calcoli

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \log\left(\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right).$$

RISULTATO

$-\frac{\pi^2}{2}$

SVOLGIMENTO

Posto $t = \frac{1}{x}$, si ha

$$\lim_{t\to0^+} \frac{\log \cos(\pi t)}{t^2} \overset{H}{\Longleftarrow} \lim_{t\to0^+} \frac{\frac{-\pi \sin(\pi t)}{\cos(\pi t)}}{2t} =$$

$$= \lim_{t\to0^+} \frac{1}{\cos(\pi t)} \cdot \left(-\frac{\pi^2}{2}\right) \cdot \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} =$$

$$= 1 \cdot \left(-\frac{\pi^2}{2}\right) \cdot 1 = -\frac{\pi^2}{2}.$$