Esame di Analisi matematica I : esercizi

Corso: OMARI ○ TIRONI ○

A.a. 2000-2001, sessione invernale, II appello.

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

Anno di Corso ________ Laurea in Ingegneria ______________________

Appello in cui si intende sostenere la prova di teoria : II ○ III ○ VOTO ________

ESERCIZIO N. 1. In quanti modi si possono estrarre quattro carte da un mazzo di quaranta in maniera che compaiano fra le carte estratte almeno due assi, nessuna figura e al più un sette.

RISULTATO

1717

SVOLGIMENTO

Si possono presentare i seguenti casi:

due assi e nessun sette, in $\binom{4}{2}\binom{20}{2}$ modi;

o

due assi e un sette, in $\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{20}{1}$ modi;

o

tre assi e nessun sette, in $\binom{4}{3}\binom{20}{1}$ modi;

o

tre assi e un sette, in $\binom{4}{3}\binom{4}{1}$ modi;

o

quattro assi, in $\binom{4}{4}$ modi;

e quindi si hanno

$$\binom{4}{2}\binom{20}{2} + \binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{20}{1} + \binom{4}{3}\binom{20}{1} + \binom{4}{3}\binom{4}{1} + \binom{4}{4} = 1717 \text{ modi.}$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$

$$E = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x^2 + x - 1 < 0 \right\}.$$

Si determinino :

- $\inf E = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

- $\sup E = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

- $\operatorname{int} E = \emptyset$

- $\operatorname{cl} E = \left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \right]$

- $\operatorname{fr} E = \operatorname{cl} E$

NB: $\operatorname{cl} E$ indica la chiusura dell'insieme E; $\operatorname{int} E$ indica la parte interna di E, $\operatorname{fr} E$ indica la frontiera di E.

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Sia

$$f(x) = x^{2/3} - \log x.$$

Si determinino:

- il dominio di f : $\mathrm{dom} f =]0, +\infty[$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
- $f'(x) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x}$
- $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f'(x) = 0$
- i punti di annullamento e i segni di f' :

$f'(x) < 0$ se $0 < x < \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}$; $f'\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}\right) = 0$; $f'(x) > 0$ se $x > \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}$

- la crescenza, la decrescenza e gli estremi di f :

f è decrescente su $]0, \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}[$; f è crescente su $]\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}, +\infty[$;
$\min f = f\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}\left(1 - \log\frac{3}{2}\right) > 0$; $\sup f = +\infty$.

- i segni di f : $f(x) > 0$ su $\mathrm{dom} f$
- $f''(x) = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{1}{x^2}$
- i punti di annullamento e i segni di f'' :

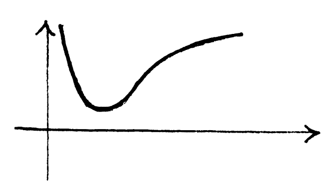
$f''(x) > 0$ se $0 < x < \left(\frac{9}{2}\right)^{3/2}$; $f''\left(\left(\frac{9}{2}\right)^{3/2}\right) = 0$; $f''(x) < 0$ se $x > \left(\frac{9}{2}\right)^{3/2}$

- la concavità, la convessità e i punti di flesso di f:

f è convessa su $]0, \left(\frac{9}{2}\right)^{3/2}[$; f è concava su $]\left(\frac{9}{2}\right)^{3/2}, +\infty[$;
$\left(\frac{9}{2}\right)^{3/2}$ è pto di flesso

Si determini il numero delle soluzioni $x \in \mathrm{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

- $t < \frac{3}{2}\left(1 - \log\frac{3}{2}\right)$: 0 soluzioni,
- $t = \frac{3}{2}\left(1 - \log\frac{3}{2}\right)$: 1 soluzione,
- $t > \frac{3}{2}\left(1 - \log\frac{3}{2}\right)$: 2 soluzioni.



ESERCIZIO N. 4. Sia

$$f(x) = 1 - \operatorname{tgh} x.$$

(i) Si determini una primitiva di f.

$$\int (1 - \operatorname{tgh} x)\, dx = x - \log(\cosh x) + c$$

(ii) Si calcoli $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx. = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\, dt = \log 2$. Infatti, si ha

$$\int_0^x f(t)\,dt = \left[t - \log(\cosh t)\right]_0^x = x - \log\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \log e^x - \log \frac{1}{2} - \log(e^x + e^{-x})$$

$$= \log\left(\frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\right) + \log 2 \longrightarrow \log 1 + \log 2 = \log 2$$

se $x \to +\infty$.

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 5. Sia

$$f(x) = \sin x + \alpha x^2,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Si dimostri che se $|\alpha| > \frac{1}{2}$, allora f non ha punti di flesso.

Si ha:

$f'(x) = \cos x + 2\alpha x$

$f''(x) = -\sin x + 2\alpha$

$f'''(x) = -\cos x$.

Se $|\alpha| > \frac{1}{2}$, allora $|f''(x)| = |-\sin x + 2\alpha| \geq 2|\alpha| - |\sin x| \geq 2|\alpha| - 1 > 0$ per ogni x. Dunque f non ha punti di flesso.

(ii) Si dimostri che se $|\alpha| < \frac{1}{2}$, allora f ha infiniti punti di flesso.

Se $|\alpha| < \frac{1}{2}$, allora l'equazione $f''(x) = 0$, cioè $\sin x = 2\alpha$, ha infinite soluzioni distinte x_k, con $k \in \mathbb{Z}$. Poiché $|\sin x_k| = 2|\alpha| < 1$, risulta $f'''(x_k) = -\cos x_k \neq 0$ e quindi x_k è pto di flesso di f per ogni $k \in \mathbb{Z}$.