Prova scritta di Analisi matematica I

Corso: OMARI ○ TIRONI ○

Sessione invernale, II appello, a.a. 1999-2000. Trieste, 24 gennaio 2000

COGNOME e NOME ____________________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ________________________

Appello in cui si intende sostenere la prova orale : II ○ III ○ VOTO ______

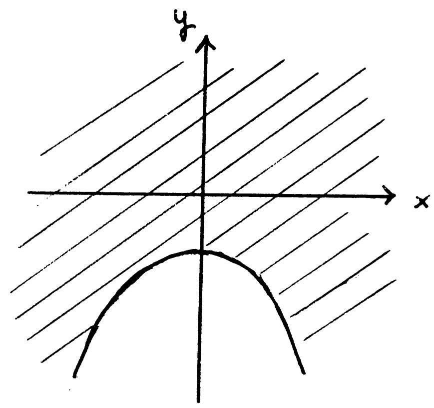
ESERCIZIO N. 1. Si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme dei numeri complessi z tali che

$$|z+i|^2 > \Re e\,(i - z^2)\,,$$

dove $|w|$ e $\Re e\, w$ indicano, rispettivamente, il modulo e la parte reale del numero complesso w.

RISULTATO

$\{ x+iy : y > -x^2 - \frac{1}{2} \}$



SVOLGIMENTO

Posto $z = x+iy$, si ha:

$|z+i|^2 > \Re e\,(i-z^2)$ sse

$x^2 + (y+1)^2 > \Re e\,(i - x^2 + y^2 - 2ixy)$ sse

$x^2 + y^2 + 2y + 1 > y^2 - x^2$ sse

$2x^2 + 2y + 1 > 0$ sse

$y > -x^2 - \frac{1}{2}$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$

$$E = \left\{ n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

Si determinino :

- $\inf E =$ min $E = 2$

- $\sup E = +\infty$

- l'insieme dei punti di accumulazione di E : $\emptyset$

- $\mathrm{fr}E = E$

- $\mathrm{cl}\,\mathcal{C}E = \mathbb{R}$

NB: cl$E$ indica la chiusura dell'insieme E; int$E$ indica la parte interna di E, fr$E$ indica la frontiera di E e $\mathcal{C}E$ il complementare di E.

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

ESERCIZIO N. 3. Sia

$$f(x) = |x| - \sqrt[3]{x^3 - 1}.$$

(i) Si determinino:

- il dominio di f : $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$
- i segni di f : $f(x) > 0$ su $\mathbb{R}$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{1-t^3}}{t} = 0$
- $f'(x) = \begin{cases} -1 - \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}} & \text{se } x<0 \\ 1 - \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}} & \text{se } x>0,\ x\neq 1 \end{cases}$
- $\lim_{x\to0^-} f'(x) = -1$ $\qquad$ $\lim_{x\to0^+} f'(x) = 1$ $\qquad$ $f'(1) = -\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -2$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$
- i segni di f' :

  $f'(x) < 0$ se $x < 0 \vee x > \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; $f'\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = 0$;

  $f'(x) > 0$ se $0 < x < \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$
- la crescenza, la decrescenza e gli estremi di f :

  $f(x)$ decresce se $x<0 \vee x > \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; $f(x)$ cresce se $0<x<\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$;

  $\sup f = +\infty$; $\inf f = 0$; $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ è pto di max. rel. con $f\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt[3]{4}$;

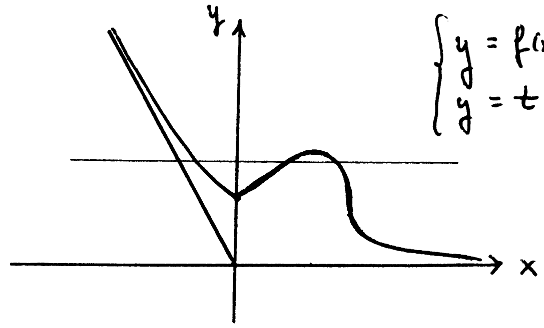
  0 è pto di min. rel. con $f(0) = 1$.
- l'equazione dell'asintoto di f a $-\infty$:

  $y = -2x$, poiché $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -2$ e $\lim_{x\to-\infty} (f(x)+2x) = 0$.

(ii) Si utilizzino i risultati precedenti per stabilire il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

- $t \leq 0$: 0 sol.
- $0<t<1 \vee t > \sqrt[3]{4}$: 1 sol.
- $t = 1 \vee t = \sqrt[3]{4}$: 2 sol.
- $1 < t < \sqrt[3]{4}$: 3 sol.

$\begin{cases} y = f(x) \\ y = t \end{cases}$



ESERCIZIO N. 4. Sia

$$f(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}\, dt.$$

Si determinino :

(i) l'espressione esplicita di f

$$\int_1^{x^2} \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}\, dt = \int_1^{|x|} \frac{2u}{(u^2+1)\, u}\, du \qquad (\text{sost. } t = u^2)$$

$$= 2\left(\operatorname{arctg}|x| - \operatorname{arctg} 1\right)$$

$$= 2 \operatorname{arctg}|x| - \frac{\pi}{2}$$

(ii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}\, dt \quad \left(:= \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = 2\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

(iii) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}\, dt \quad \left(:= -\lim_{x\to 0} f(x)\right) = \frac{\pi}{2}$

COGNOME e NOME ______________________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 5. Si dica per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ la funzione

$$f(x) = \alpha \log x + x^\alpha$$

è concava su $]0, +\infty[$.

RISULTATO

$0 < \alpha \leq 1$

SVOLGIMENTO

(i) Si calcoli $f''(x)$:

$$f'(x) = \frac{\alpha}{x} + \alpha x^{\alpha-1}$$

$$f''(x) = -\frac{\alpha}{x^2} + \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} = \frac{\alpha}{x^2}\left(-1 + (\alpha-1)x^\alpha\right)$$

(ii) Si studi il caso $\alpha > 0$:

Si ha : $\operatorname{sign}(f''(x)) = \operatorname{sign}(-1 + (\alpha-1)x^\alpha)$

e quindi : $f''(x) < 0$ per ogni $x > 0$ se e solo se $0 < \alpha \leq 1$.

Dunque f è concava su $]0, +\infty[$ se e solo se $0 < \alpha \leq 1$.

(se $\alpha > 1$, f'' cambia segno).

(iii) Si studi il caso $\alpha < 0$:

Si ha : $\operatorname{sign}(f''(x)) = \operatorname{sign}(1 - (\alpha-1)x^\alpha)$

e quindi : $f''(x) > 0$ per ogni $x > 0$.

Dunque f è convessa su $]0, +\infty[$.