Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria. Trieste, 2 luglio 2001

Esame di Analisi matematica I : esercizi

Corso: OMARI ○ TIRONI ○

A.a. 2000-2001, sessione estiva, III appello.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

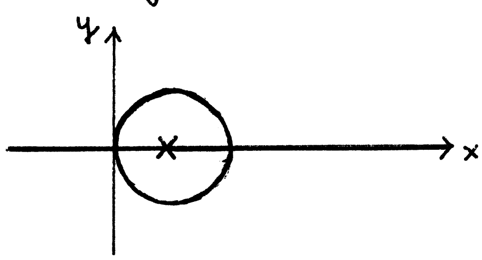
Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

VOTO ______

ESERCIZIO N. 1. Si determini e si rappresenti graficamente nel piano di Gauss l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che la parte immaginaria di $\frac{z^2}{z-1}$ è nulla.

RISULTATO

$S = \{x+iy : x \neq 1 \wedge y = 0\} \cup \{x+iy : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$.



SVOLGIMENTO

Posto $z = x+iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha per ogni $z \neq 1$

$\frac{z^2}{z-1} = \frac{z^2(\bar{z}-1)}{|z-1|^2} \in \mathbb{R}$ se e solo se $z^2(\bar{z}-1) \in \mathbb{R}$ se e solo se

$(x^2-y^2+2ixy)(x-1-iy) = [(x^2-y^2)(x-1)+2xy^2] + i[(y^2-x^2)y + 2xy(x-1)] \in \mathbb{R}$

se e solo se $2xy(x-1) + (y^2-x^2)y = y[x^2+y^2-2x] = 0$

se e solo se $y = 0 \quad \vee \quad x^2-2x+y^2 = 0$.

Quindi $\frac{z^2}{z-1} \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$z \in S = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 1 \wedge y = 0\} \vee \{z \in \mathbb{C} : x^2-2x+y^2 = 0\}.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$

$$E = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 1\}.$$

Si determinino :

- $\operatorname{int} E =$ $\emptyset$
- $\operatorname{cl} E =$ $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant 1\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
- $\operatorname{fr} E =$ $\operatorname{cl} E$

Si dica, giustificando la risposta, se $\operatorname{cl} E$ è compatto.

cl E non è compatto, perchè non è limitato.

Si dica, giustificando la risposta, se $\operatorname{fr} E$ è connesso.

fr E non è connesso, perchè non è un singoletto nè un intervallo.

NB: $\operatorname{cl} E$ indica la chiusura dell'insieme E; $\operatorname{int} E$ indica la parte interna di E, $\operatorname{fr} E$ indica la frontiera di E.

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

ESERCIZIO N. 3. Sia

$$f(x) = \exp(|x-1| - x)\,.$$

Si determinino:

- il dominio e i segni di f :

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$; $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = \begin{cases} e^{1-2x} & \text{se } x \le 1 \\ \frac{1}{e} & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{e}$

- $f'(x) = \begin{cases} -2e^{1-2x} & \text{se } x < 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

- $\lim_{x\to1^-} f'(x) = -\frac{2}{e}$ $\lim_{x\to1^+} f'(x) = 0$

- i punti di annullamento e i segni di f' :

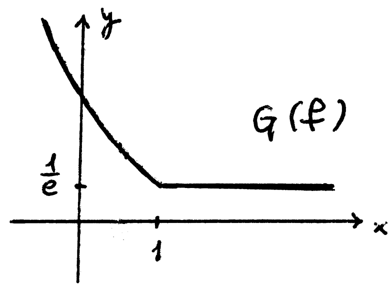
$f'(x) < 0 \iff x < 1$; $f'(x) = 0 \iff x > 1$.

- la crescenza, la decrescenza e gli estremi di f :

f è decrescente su $]-\infty, 1[$; f è costante su $[1, +\infty[$;
$\min f = \frac{1}{e}$; $\sup f = +\infty$.

Si determini il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

- $t < \frac{1}{e}$: 0 soluzioni
- $t = \frac{1}{e}$: infinite soluzioni
- $t > \frac{1}{e}$: 1 soluzione



Si provi che f è convessa in senso debole sul suo dominio.

Si deve provare che per ogni $x_1 < x < x_2$ si ha $f(x) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$.

(a) Se $x_1, x_2 \in]-\infty, 1]$, ciò è vero perché e^{1-2x} è convessa su $]-\infty, 1[$;

(b) Se $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$, ciò è vero perché f è costante su $]1, +\infty[$;

(c) Se $x_1 < 1 < x_2$, allora $f(x) \le \frac{f(1) - f(x_1)}{1 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) =$

$= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{1 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$ se $x_1 < x < 1$

e $f(x) = f(1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2) + f(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$

se $1 \le x < x_2$.

ESERCIZIO N. 4. Sia
$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,.$$

Si determini una primitiva di f sull'intervallo $[1, +\infty[$.

Si ha, integrando per parti,

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \frac{x^2+1-x^2}{x(x^2+1)}\,dx =$$
$$= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$
$$= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \log x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c$$
$$= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \log\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + c\,.$$

Si calcoli $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Si ha

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left[-\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \log\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\pi}{4} + \log\sqrt{2}\right] =$$
$$= \frac{\pi}{4} + \log\sqrt{2}$$

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 5. Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2}\,dt}{x^3}.$$

RISULTATO

$-\frac{1}{3}$

SVOLGIMENTO

Applicando il teorema di de L'Hospital (caso $\frac{0}{0}$), si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2}dt}{x^3} \Leftarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{x^2}}{3x^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} -\frac{1}{3}\cdot\frac{e^t-1}{t} = -\frac{1}{3}$$