Prova scritta di Analisi matematica I
Corso: OMARI ○ TIRONI ○
Sessione estiva, II appello, a.a. 1999-2000. Trieste, 19 giugno 2000

STUDENTE (Cognome e nome)____________ **Matr. N.** ______

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ____________

Appello in cui intende sostenere la prova orale II ○ III ○ **Voto** ______

ESERCIZIO N. 1. Intorno ad un tavolo circolare ci sono 6 sedie numerate. In quanti modi possono disporsi 3 persone in maniera che al massimo 2 sedie adiacenti rimangano vuote ?

RISULTATO

84

SVOLGIMENTO

Modi di scegliere i posti:

- 2 modi di alternare un posto vuoto e uno occupato
- $6 \cdot 2$ modi di scegliere due posti vuoti consecutivi e un terzo posto vuoto non adiacente a questi.

Modi di permutare le persone sui posti scelti: $3!$

In conclusione, le persone possono disporsi in

$$(2 + 6 \cdot 2) \cdot 3! = 84 \text{ modi}.$$

STUDENTE ______________________ **Matr. N.** __________

ESERCIZIO N. 2. È dato il sottoinsieme E della retta reale $\mathbb{R}$ così definito:

$$E = \left\{ \log\left(\frac{n}{n+1}\right) : n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

Si determinino:

- $\inf E$ = $\min E = \log \frac{1}{2}$, essendo la succ. $\left(\log \frac{n}{n+1}\right)_n$ crescente.
- $\sup E$ = $\lim_{n \to +\infty} \log \frac{n}{n+1} = 0$, per il teorema sul limite delle fcn monotone.
- i punti d'accumulazione di E : i pti di E sono isolati e l'unico pto di accumulazione per E è $\sup E = 0 \, (\notin E)$.
- $\mathrm{cl}\, E$ = $E \cup \{0\}$
- $\mathrm{fr}\, E$ = $\mathrm{cl}\, E$

NB: cl$E$ indica la chiusura dell'insieme E; int$E$ indica la parte interna di E e fr$E$ indica la frontiera di E.

STUDENTE ______________________ **Matr. N.** __________

Sia

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{se } x \leq 0, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Si dica per quali valori di $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

(i) f è continua su $\mathbb{R}$

- f è continua in $x \neq 0$;
- f è continua in 0 se e solo se $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$, cioè se e solo se $d = 1$.

(ii) f è di classe C^1 su $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ 3ax^2 + 2bx + c & \text{se } x > 0 \end{cases}$$ è continua in $x \neq 0$;

f è derivabile in 0 e f' è continua in 0 se e solo se f è continua e $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$, cioè se e solo se $\begin{cases} c = 1 \\ d = 1 \end{cases}$

(per il teor. sul lim. della derivata).

(iii) f è di classe C^2 su $\mathbb{R}$

$$f''(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ 6ax + 2b & \text{se } x > 0 \end{cases}$$ è continua in $x \neq 0$;

f è due volte derivabile in 0 e f'' è continua in 0 se e solo se f è di classe C^1 e $\lim_{x \to 0^-} f''(x) = \lim_{x \to 0^+} f''(x)$, cioè se e solo se $\begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases}$

(per il teor. sul lim. della derivata).

(iv) f è di classe C^2 ed è convessa su $\mathbb{R}$

f è di classe C^2 se e solo se $\begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases}$ ed è convessa

se e solo se $f''(x) = 6ax + 1 > 0$ per ogni $x \in [0, +\infty[$,

cioè se e solo se $a \geq 0$.

ESERCIZIO N. 4. Sia
$$f(x) = \frac{x}{(x^2+1)(x^2+2)}.$$

(i) Tra le primitive $F(x)$ di $f(x)$ su $]0,+\infty[$ si determini quella che vale 0 in $x=1$.

- $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx = \frac{1}{2}\left(\left(\int \frac{dt}{(t+1)(t+2)}\right)\right)_{t=x^2}$

- $\displaystyle\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2} = \frac{(A+B)t + (2A+B)}{(t+1)(t+2)}$ se e solo se

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

- $\displaystyle\int \frac{dt}{(t+1)(t+2)} = \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t+2} = \log(t+1) - \log(t+2) + c$

- $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{x^2+1}{x^2+2} + c =: F_c(x)$

- $F_c(1) = 0$ se e solo se $\displaystyle\frac{1}{2}\log\frac{2}{3} + c = 0$ se e solo se

$$c = \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$$

- $\displaystyle F(x) = \frac{1}{2}\log\frac{x^2+1}{x^2+2} + \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$

(ii) Si calcoli l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt \; \left(= \lim_{x\to+\infty} F(x)\right)$.

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} F(x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\log\frac{x^2+1}{x^2+2} + \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$$

STUDENTE ______________________ Matr. N. ____________

ESERCIZIO N. 5. Sia
$$f(x) = \frac{x}{1 + x + \log x}.$$

(i) Si provi che la funzione $g(x) = 1 + x + \log x$ si annulla in un solo punto $\alpha \in]0, +\infty[$.

$g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ è continua; $\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$;
$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ in $]0,+\infty[$; per il teorema di esistenza degli zeri e la crescenza esiste uno e un solo $\alpha \in]0,1[$ tale che $g(\alpha) = 0$.

(ii) Si determinino:

- il dominio e i segni di f
  - $\mathrm{dom}\, f =]0,+\infty[\setminus \{\alpha\}$;
  - $\mathrm{sign}\, f(x) = \mathrm{sign}\, g(x)$ per $x \neq \alpha$: $f(x) < 0$ se $x \in]0,\alpha[$, $f(x) > 0$ se $x > \alpha$
- $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$ $\qquad \lim_{x\to\alpha^-} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to\alpha^+} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$
- $f'(x) =$
$$\frac{\log x}{(1+x+\log x)^2}$$
- i segni di f'

  $\mathrm{sign}\, f'(x) = \mathrm{sign}\, \log x$ per $x \neq \alpha$: $f'(x) < 0$ se $x \in]0,\alpha[\cup]\alpha,1[$, $f'(x) = 0$ se $x = 1$, $f'(x) > 0$ se $x > 1$.
- la crescenza, la decrescenza e gli estremi di f

  f è decrescente su $]0,\alpha[$ e su $]\alpha,1[$, f è crescente su $]1,+\infty[$, 1 è pto di min. rel. con $f(1) = \frac{1}{2}$; $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$

(iii) Si determini il numero delle soluzioni $x \in \mathrm{dom}\, f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

- $t \in]-\infty, 0[$: 1 soluzione
- $t \in [0, \frac{1}{2}[$: 0 soluzioni
- $t = \frac{1}{2}$: 1 soluzione
- $t \in]\frac{1}{2}, 1[$: 2 soluzioni
- $t \in [1, +\infty[$: 1 soluzione