Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria. Trieste, 18 giugno 2001

Esame di Analisi matematica I : esercizi
Corso: OMARI ○ TIRONI ○
A.a. 2000-2001, sessione estiva, II appello.

COGNOME e NOME ________________ N. Matricola ________

Anno di Corso ______ Laurea in Ingegneria ________________

Appello in cui si intende sostenere la prova di teoria : II ○ III ○ VOTO ______

**ESERCIZIO N. 1.** In quanti modi un allevatore può ripartire 9 mucche, di cui 3 pazze, in 3 gruppi, formati da 4, 3 e 2 mucche rispettivamente, in maniera che in ogni gruppo ci sia una mucca pazza?

**RISULTATO**

360

**SVOLGIMENTO**

Ci sono 3 modi per scegliere una mucca pazza da inserire nel gruppo di 4 mucche e $\binom{6}{3}$ modi di scegliere le altre 3 mucche sane; 2 modi per scegliere una mucca pazza, fra le restanti 2, da inserire nel gruppo di 3 mucche e $\binom{3}{2}$ modi di scegliere le altre 2 mucche sane, fra le restanti 3.

In conclusione: $3 \cdot \binom{6}{3} \cdot 2 \cdot \binom{3}{2} = 360$

**ESERCIZIO N. 2.** Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$

$$E = \{x + n : x \in ]0,1[, n \in \{0,2\}\}.$$

Si determinino :

- $\inf E =$ 0
- $\sup E =$ 3
- $\operatorname{int} E =$ $]0,1[ \cup ]2,3[$
- $\operatorname{cl} E =$ $[0,1] \cup [2,3]$
- $\operatorname{fr} E =$ $\{0,1,2,3\}$

NB: $\operatorname{cl} E$ indica la chiusura dell'insieme $E$; $\operatorname{int} E$ indica la parte interna di $E$, $\operatorname{fr} E$ indica la frontiera di $E$.

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

**ESERCIZIO N. 3.** Sia

$$f(x) = \log(1-x) - \log(1+x^2)\,.$$

Si determinino:

- il dominio e i segni di $f$ : $\text{dom} f = \,]-\infty, 1[\,$ ;

$f(x) > 0 \iff x \in \,]-1, 0[\,$ ; $f(x) < 0 \iff x \in \,]-\infty, -1[\, \cup \,]0, 1[\,$ ;

$f(x) = 0 \iff x = 0 \vee x = 1$ .

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

- $f'(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2x}{1+x^2}$

- i punti di annullamento e i segni di $f'$ :

$f'(x) > 0 \iff x \in \,]-\infty, 1-\sqrt{2}[\,$ ; $f'(x) < 0 \iff x \in \,]1-\sqrt{2}, 1[\,$ ;

$f'(x) = 0 \iff x = 1-\sqrt{2}$ .

- la crescenza, la decrescenza e gli estremi di $f$ :

$f$ è crescente su $]-\infty, 1-\sqrt{2}[$ ; $f$ è decrescente su $]1-\sqrt{2}, 1[$ ;

$\max f = f(1-\sqrt{2}) = \log\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$ ; $\inf f = -\infty$ .

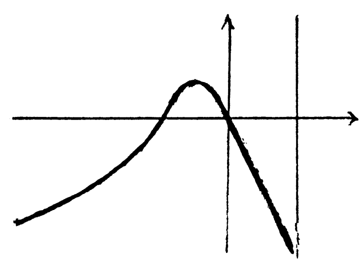
- $f''(x) = \dfrac{x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x - 3}{(x-1)^2(1+x^2)^2}$

Si dimostri che $f$ è convessa in un intorno di $-\infty$.

Poichè $(x-1)^2(1+x^2)^2 > 0$ in dom $f$ e $\lim_{x\to+\infty}(x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x - 3) = +\infty$, si conclude che esiste un intorno di $-\infty$ dove $f''$ è positiva.

Si determini il numero delle soluzioni $x \in \text{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

- $t < \log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$ : 2 soluzioni
- $t = \log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$ : 1 soluzione
- $t > \log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$ : 0 soluzioni



**ESERCIZIO N. 4.** Sia
$$f(x) = \frac{1}{x^{1/3} + x^{2/3}}\,.$$

Si determini una primitiva di $f$ sull'intervallo $]0,1]$.

$$\int \frac{dx}{x^{1/3}+x^{2/3}} = \left(\int \frac{3t^2}{t+t^2}\,dt\right)_{t=x^{1/3}} = \left(3\int \frac{t}{1+t}\,dt\right)_{t=x^{1/3}}$$
$$= \left(3t - 3\log(1+t) + c\right)_{t=x^{1/3}}$$
$$= 3x^{1/3} - 3\log(1+x^{1/3}) + c$$

Si calcoli $\int_0^1 f(x)\,dx$.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 f(t)\,dt$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \left(3 - 3\log 2 - 3x^{1/3} + 3\log(1+x^{1/3})\right)$$
$$= 3 - 3\log 2$$

**COGNOME e NOME** ______________________ **N. Matricola** __________

**ESERCIZIO N. 5.** Si ponga

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{se } x<0, \\ x(1-x) & \text{se } 0 \le x \le 1, \\ cx+d & \text{se } x>1, \end{cases}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Si determinino $a, b, c, d$ in modo che :

- $f$ sia continua su $\mathbb{R}$

- $f$ è continua in $0 \iff \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \iff b = 0$

  $f$ è continua in $1 \iff \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \iff c+d = 0$

- $f$ è continua su $\mathbb{R} \iff b = 0 \wedge c = -d$

- $f$ sia di classe $C^1$ su $\mathbb{R}$

- $f'(x) = \begin{cases} a & \text{se } x<0, \\ 1-2x & \text{se } 0<x<1, \\ c & \text{se } x>1. \end{cases}$

- $f$ ha derivata continua in $0 \iff \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) \wedge f$ è cont. in $0 \iff$

  $\iff a = 1 \wedge b = 0$ ; $f$ ha derivata continua in $1 \iff$

  $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) \wedge f$ è continua in $1 \iff c = -1 \wedge d = 1$

- $f$ è di classe $C^1$ su $\mathbb{R} \iff a = 1 \wedge b = 0 \wedge c = -1 \wedge d = 1$.

- $f$ sia continua su $\mathbb{R}$ e gli asintoti di $f$ a $+\infty$ e a $-\infty$ coincidano

- Se $f$ è continua su $\mathbb{R}$, gli asintoti di $f$ sono $ax$, a $-\infty$,

  e $cx - c$, a $+\infty$. Si ha : $ax = cx - c$ per ogni $x$

  $\iff (a-c)x + c = 0$ per ogni $x \iff a = c = 0$.

- $f$ è continua su $\mathbb{R}$ e gli asintoti di $f$ a $+\infty$ e a $-\infty$

  coincidono $\iff a = b = c = d = 0$.