Esame di Analisi matematica I : esercizi

Corso: OMARI ◯ TIRONI ◯

A.a. 2000-2001, sessione invernale, I appello.

COGNOME e NOME ______________________	N. Matricola ________
Anno di Corso ______ Laurea in Ingegneria ______________________	
Appello in cui si intende sostenere la prova orale : I ◯ II ◯ III ◯	VOTO ________

ESERCIZIO N. 1. Sia

$$f(z) = \frac{2iz}{(1+i)|z-1|\overline{z}},$$

dove $|w|$ e $\overline{w}$ indicano rispettivamente il modulo e il coniugato del numero complesso w. Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$|f(z)| > 1.$$

RISULTATO

$\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2}\} \setminus \{0,1\}$

SVOLGIMENTO

Si ha:

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$;
- per ogni $z \in \operatorname{dom} f$,

$$|f(z)| = \frac{|2||i||z|}{|1+i||z-1||\overline{z}|} = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot|z-1|} > 1$$

se e solo se $|z-1| < \sqrt{2}$.

In conclusione

$$\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2}\} \setminus \{0,1\}.$$

ESERCIZIO N. 2. Si provi per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, si ha

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

DIMOSTRAZIONE

Posto $p(n) =$ " $\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ", si ha:

- $p(1) =$ " $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1}$ " è vera ;
- per ogni n, $p(n)$ implica $p(n+1)$ è vera :

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

ESERCIZIO N. 3. Sia

$$f(x) = x^2 + e^{1/x}.$$

Si determinino:

- il dominio e i segni di f :

dom $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ $\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \frac{2x^3 - e^{1/x}}{x^2}$
- $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$ $\quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$
- $f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$.
- i punti di annullamento e i segni di f' (dopo aver verificato che esiste uno ed un solo $\alpha > 0$ tale che $f'(\alpha) = 0$) :

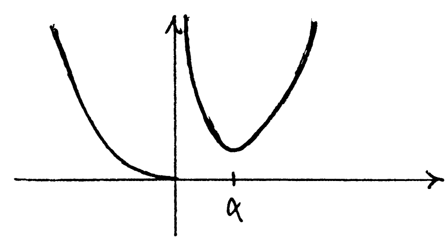
  - $f'(x) < 0$ per ogni $x < 0$;
  - poiché f' è continua su $]0, +\infty[$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ e f' è crescente su $]0, +\infty[$ (essendo $f''(x) > 0$ per ogni $x > 0$), si conclude che esiste uno e un solo $\alpha > 0$ tale che $f'(\alpha) = 0$, $f'(x) < 0$ per ogni $x \in]0, \alpha[$ e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in]\alpha, +\infty[$.

- la crescenza, la decrescenza e gli estremi di f :

f è decrescente su $]-\infty, 0[$ e su $]0, \alpha[$; f è crescente su $]\alpha, +\infty[$; α è pto di minimo relativo ; $\sup f = +\infty$; $\inf f = 0$.

Si determini il numero delle soluzioni $x \in$ dom$f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

- $t \in]-\infty, 0]$: 0 soluzioni
- $t \in]0, f(\alpha)[$: 1 soluzione
- $t = f(\alpha)$: 2 soluzioni
- $t \in]f(\alpha), +\infty[$: 3 soluzioni



ESERCIZIO N. 4. Si calcoli

$$\int_0^\pi \left(\pi + \int_x^\pi x \cos t \, dt\right) dx.$$

RISULTATO

$$\pi^2 - \pi$$

SVOLGIMENTO

Si ha:

- $\int_x^\pi x \cdot \cos t \, dt = x \left[\sin t\right]_x^\pi = - x \cdot \sin x$
- $\int_0^\pi (\pi - x \sin x) dx = \pi^2 - \int_0^\pi x \sin x \, dx =$

$$= \pi^2 - \left(\left[- x \cos x \right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \, dx \right) =$$

$$= \pi^2 - \pi$$

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

ESERCIZIO N. 5. Sia

$$f(x) = e^{-x^2} \cdot \log x\,.$$

Si determinino:

- $\mathrm{Ord}_{0^+} f =$ sottoreale, in quanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x^2}\cdot \log x}{\log x} = 1, \quad \text{cioè} \quad \mathrm{Ord}_{0^+} f = \mathrm{Ord}_{0^+} \log x$$

- $\mathrm{ord}_{+\infty} f =$ sopra reale, in quanto

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x^2}\log x}{e^{-x}} = 0, \quad \text{cioè} \quad \mathrm{ord}_{+\infty} f > \mathrm{ord}_{+\infty} e^{-x}.$$

Si decida se esiste finito $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ (giustificando la risposta).

- esiste finito $\int_0^1 f(x)\,dx$, in quanto $\mathrm{Ord}_{0^+} f(x$ è sottoreale e quindi, per esempio, $< \frac{1}{2}$
- esiste finito $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$, in quanto $\mathrm{ord}_{+\infty} f$ è sopra reale e quindi, per esempio, > 2

quindi esiste finito $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.