Esame di Analisi matematica I : esercizi

Corso: OMARI ○ TIRONI ○

A.a. 2000-2001, sessione invernale, III appello.

COGNOME e NOME ____________________	N. Matricola __________
Anno di Corso ______ Laurea in Ingegneria ____________________	

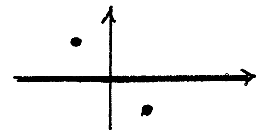
ESERCIZIO N. 1. Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z(z^2 + i) = \overline{z}(z^2 + i),$$

dove $\overline{z}$ indica il coniugato del numero complesso z.

RISULTATO

$\{x+iy : x \in \mathbb{R} \wedge y = 0\} \cup \{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\}.$



SVOLGIMENTO

Si ha:

- $z(z^2+i) = \overline{z}(z^2+i) \iff z^2+i=0 \vee z=\overline{z}$;
- $z^2 = -i \iff [\rho, \vartheta]^2 = [1, -\frac{\pi}{2}] \iff [\rho^2, 2\vartheta] = [1, -\frac{\pi}{2}]$

$$\iff \begin{cases} \rho = 1 \\ 2\vartheta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k=0,1) \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \vartheta = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} \rho = 1 \\ \vartheta = \frac{7}{4}\pi \end{cases}$$

$$\iff z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

- $z = \overline{z} \iff x+iy = x-iy \iff y=0.$

Quindi l'insieme delle soluzioni è

$$\{x+iy : x \in \mathbb{R} \wedge y=0\} \cup \{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\}.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$

$$E =]-\infty, 1] \setminus \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

Si determinino :

- $\sup E =$ 1
- $\operatorname{int} E =$ $E \setminus \{0\}$
- $\operatorname{cl} E =$ $]-\infty, 1]$
- $\operatorname{fr} E =$ $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\} \cup \{0\}$
- $\operatorname{int} CE =$ $]1, +\infty[$

(essendo $CE = [1, +\infty[\cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$).

NB: $\operatorname{cl} E$ indica la chiusura dell'insieme E; $\operatorname{int} E$ indica l'interno di E, $\operatorname{fr} E$ indica la frontiera di E e CE il complementare di E.

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

ESERCIZIO N. 3. Sia

$$f(x) = 2x - \arcsin x.$$

Si determinino:

- il dominio di f : $[-1,1]$; f è dispari
- $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ su $]-1,1[$
- $f'(-1) = -\infty$ $f'(1) = -\infty$
- i punti di annullamento e i segni di f' :

$f'(x) = 0 \iff x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $f'(x) > 0 \iff |x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$;
$f'(x) < 0 \iff -1 < x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \frac{\sqrt{3}}{2} < x < 1$.

- la crescenza, la decrescenza e gli estremi di f :

f è decrescente su $[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}[$ e su $]\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$; f è crescente su $]-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}[$; $\min f = f(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$; $\max f = f(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$;
-1 è pto di max. rel. ; 1 è pto di min. rel.

- i punti di annullamento e i segni di f :

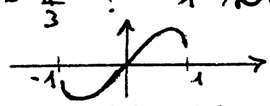
$f(x) = 0 \iff x = 0$; $f(x) < 0 \iff x \in [-1, 0[$; $f(x) > 0 \iff x \in]0,1]$

- $f''(x) = \dfrac{-x}{(1-x^2)^{3/2}}$ su $]-1,1[$.
- la convessità, la concavità e i punti di flesso di f : f è convessa su $]-1,0[$;

f è concava su $]0,1[$; 0 è pto di flesso.

Si determini il numero delle soluzioni $x \in \mathrm{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

- $|t| > \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$: 0 soluzioni
- $|t| = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$: 1 soluzione
- $-\sqrt{3} + \frac{\pi}{3} < t \le -2 + \frac{\pi}{2}$ $\vee$ $2 - \frac{\pi}{2} \le t < \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$: 2 soluzioni
- $|t| < 2 - \frac{\pi}{2}$: 1 soluzione



Si verifichi che è applicabile a f il teorema di Lagrange e si determinino i punti la cui esistenza è garantita da tale teorema.

f è derivabile su $]-1,1[$ e continua su $[-1,1]$, quindi per il teor. di Lagrange esiste $\xi \in]-1,1[$ tale che

$$4 - \pi = f(1) - f(-1) = f'(\xi) \cdot 2 \iff 2 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} = 2 - \frac{\pi}{2}$$

$$\iff \xi = -\sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}} \vee \xi = \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}$$

ESERCIZIO N. 4. Si calcoli
$$\int_{-\infty}^{\log \pi} \left(\int_0^{e^x} \sin(e^x)\, dt \right) dx.$$

RISULTATO

2

SVOLGIMENTO

Si ha:
$$\int_y^{\log\pi}\left(\int_0^{e^x} \sin(e^x)\,dt\right)dx = \int_y^{\log\pi} e^x \sin(e^x)\,dx \qquad (\text{sost. } x=\log u)$$
$$= \int_{e^y}^{\pi} u\cdot \sin u \cdot \frac{1}{u}\,du = \int_{e^y}^{\pi} \sin u\,du$$
$$= \Big[-\cos u\Big]_{e^y}^{\pi} = 1+\cos(e^y) \to 2 \quad \text{se } y\to-\infty$$
e quindi
$$\int_{-\infty}^{\log\pi}\left(\int_0^{e^x} \sin(e^x)\,dt\right)dx = 2.$$

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 5. Sia

$$f(x) = \begin{cases} 2ax + \dfrac{a}{x} - b & \text{se } \frac{1}{2} \le x < 1 \\ \log x - 2x + 2 & \text{se } 1 \le x \le \frac{3}{2} \end{cases},$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$.

Si determinino $a, b \in \mathbb{R}$ in modo tale che f sia di classe C^1 sull'intervallo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

Si ha:

- f è continua $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 3a = b$

- $f'(x) = \begin{cases} 2a - \dfrac{a}{x^2} & \text{se } \frac{1}{2} \le x < 1 \\ \dfrac{1}{x} - 2 & \text{se } 1 < x \le \frac{3}{2} \end{cases}$

- f è di classe $C^1 \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ è continua} \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = b \\ a = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$

Determinati gli $a, b \in \mathbb{R}$ per cui f è di classe C^1 su $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, si trovi il massimo assoluto di$f$ su $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

Si ha:

$f(x) = \begin{cases} -2x - \dfrac{1}{x} + 3 & \text{se } \frac{1}{2} \le x < 1 \\ \log x - 2x + 2 & \text{se } 1 \le x \le \frac{3}{2} \end{cases}$ e

$f'(x) = \begin{cases} -2 + \dfrac{1}{x^2} & \text{se } \frac{1}{2} \le x < 1 \\ \dfrac{1}{x} - 2 & \text{se } 1 \le x \le \frac{3}{2} \end{cases}$. Risulta:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \in]\frac{1}{2}, 1[$; $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$;

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}]$. Quindi $\frac{1}{\sqrt{2}}$ è pto di massimo assoluto e $\max f = f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 3 - 2\sqrt{2}$.