Esame di Analisi matematica I : esercizi

Corso: OMARI ○ TIRONI ○

A.a. 2000-2001, sessione autunnale, I appello.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

VOTO ______

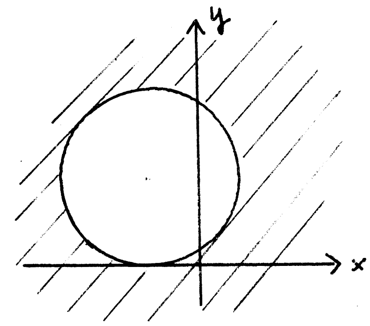
ESERCIZIO N. 1. Si determini e si rappresenti graficamente nel piano di Gauss l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{|z-1|}{|\overline{z}+i|} < \sqrt{2},$$

dove $|w|$ e $\overline{w}$ indicano, rispettivamente, il modulo e il coniugato del numero complesso w.

RISULTATO

$$\{x+iy \in \mathbb{C} : (x+1)^2+(y-2)^2 > 4\}$$



SVOLGIMENTO

Posto $z = x+iy$, con $x,y \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\begin{cases} z \neq i \\ \left|\dfrac{z-1}{\overline{z}+i}\right| = \dfrac{|z-1|}{|z-i|} = \sqrt{\dfrac{(x-1)^2+y^2}{x^2+(y-1)^2}} < \sqrt{2} \end{cases}$$ se e solo se

$(x-1)^2+y^2 < 2x^2+2(y-1)^2$ se e solo se

$0 < x^2+2x+y^2-4y+1$ se e solo se

$(x-1)^2+(y-2)^2 > 4$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$

$$E = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

Si determinino :

- $\operatorname{int} E = \emptyset$

- $\operatorname{cl} E = E \cup \{1\}$

- $\operatorname{fr} E = \operatorname{cl} E$

- $\operatorname{int}(CE) = \mathbb{R} \setminus \operatorname{cl} E$

- $\operatorname{cl}(CE) = \mathbb{R}$

NB: $\operatorname{cl} E$ indica la chiusura dell'insieme E; $\operatorname{int} E$ indica la parte interna di E, $\operatorname{fr} E$ indica la frontiera di E e CE il complementare di E.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Sia
$$f(x) = -x - \frac{2}{x} + \log x\,.$$

Si determinino:

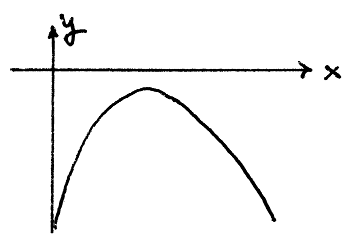
- il dominio di f :

  $\mathrm{dom} f =]0, +\infty[$

- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- $f'(x) = -1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$ in $\mathrm{dom} f$
- i punti di annullamento e i segni di f' : $f'(x) > 0 \iff 0 < x < 2$;
  $f'(x) = 0 \iff x = 2$; $f'(x) < 0 \iff x > 2$.
- la crescenza, la decrescenza e gli estremi di f : f è crescente su $]0, 2[$;
  f è decrescente su $]2, +\infty[$; $\max f = f(2) = -3 + \log 2 < 0$.
  $\inf f = -\infty$.
- i segni di f : $f(x) < 0$ in $\mathrm{dom} f$, essendo $\max f < 0$.
- $f''(x) = -\frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2}$ in $\mathrm{dom} f$
- i segni di f'' : $f''(x) < 0$ in $\mathrm{dom} f$
- la concavità, la convessità e i punti di flesso di f : f è concava in $\mathrm{dom} f$.

Si determini il numero delle soluzioni $x \in \mathrm{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

- $t < -3 + \log 2$: 2 soluzioni
- $t = -3 + \log 2$: 1 soluzione
- $t > -3 + \log 2$: 0 soluzioni



ESERCIZIO N. 4. Sia
$$f(x) = \frac{2x}{x^2+x+1}\,.$$

Si determini una primitiva di f su $\mathbb{R}$.

Si ha:

- $$\int \frac{2x}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$
$$= \log(x^2+x+1) - \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

- $$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4} = \sqrt{4/3}\int \frac{\sqrt{4/3}}{\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3/4}}\right)^2+1}\,dx$$
$$= \sqrt{\frac{4}{3}}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3/4}}\right) + c\,, \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

In conclusione una primitiva di f su $\mathbb{R}$ è

$$\log(x^2+x+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

Si calcoli $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left[\log(x^2+x+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$
$$= +\infty$$

COGNOME e NOME ______________________________ N. Matricola ______________

ESERCIZIO N. 5. Si calcoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt}{x^3}.$$

RISULTATO

$$\frac{1}{18}$$

SVOLGIMENTO

Si ha, per il teorema della media,

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \lim_{x\to 0} x\,\frac{\sin\xi}{\xi} = 0 \qquad (\text{essendo } 0<|\xi|<|x|)$$

Quindi, applicando la regola di de l'Hospital, si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt}{x^3} = \frac{1}{18} \overset{H}{\Longleftarrow} \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{3x^3} = \frac{1}{18} \overset{H}{\Longleftarrow} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{9x^2} = \frac{1}{18}$$

$$\overset{H}{\Longleftarrow} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{18x} = \frac{1}{18}$$