**Prova scritta di Analisi matematica I**

**Corso: OMARI ○ TIRONI ○**

**Sessione invernale, I appello, a.a. 1999-2000. Trieste, 10 gennaio 2000**

**COGNOME e NOME** ______________________ **N. Matricola** __________

**Anno di Corso** ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________

**Appello in cui si intende sostenere la prova orale : I ○ II ○ III ○ VOTO** ________

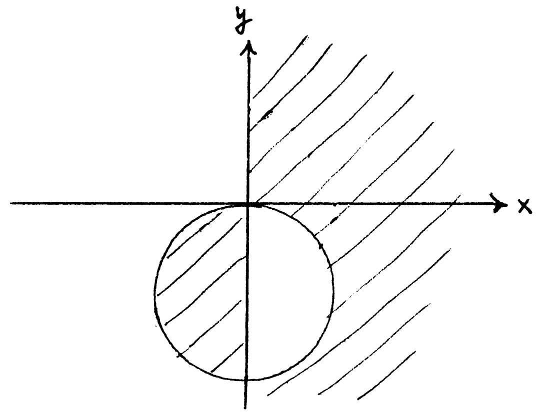
**ESERCIZIO N. 1.** Si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme dei numeri complessi $z$ tali che

$$\Re e\left(\frac{z^2-1}{z+i}\right) > 0,$$

dove $\Re e\ w$ indica la parte reale del numero complesso $w$.

**RISULTATO**

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2+(y+1)^2 > 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x^2+(y+1)^2 < 2 \end{cases}$$




**SVOLGIMENTO** Posto $z = x+iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ si ha, per $z \neq -i$

$$\frac{z^2-1}{z+i} = \frac{z^2-1}{z+i}\cdot\frac{\bar{z}-i}{\bar{z}-i} = \frac{|z|^2 z - i z^2 - \bar{z} + i}{|z+i|^2}$$

$$= \frac{x(x^2+y^2+2y-1)}{|z+i|^2} + i\,\frac{x^2y+y^3-x^2+y^2+y+1}{|z+i|^2}$$

e quindi

$$\Re e\left(\frac{z^2-1}{z+i}\right) > 0 \quad \text{se e solo se} \quad x(x^2+y^2+2y-1) > 0 \quad \text{se e solo se}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2+(y+1)^2 > 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x^2+(y+1)^2 < 2 \end{cases}$$

**ESERCIZIO N. 2.** Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$

$$E = \left\{ \frac{m}{m^2+1} : m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Si determinino :

- $\inf E = -\frac{1}{2}$
- $\sup E = \frac{1}{2}$
- i punti di accumulazione di $E$ : $0$
- $\mathrm{cl}E = E$

NB: cl$E$ indica la chiusura dell'insieme $E$; int$E$ indica la parte interna di $E$, fr$E$ indica la frontiera di $E$ e $\mathcal{C}E$ il complementare di $E$.

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

**ESERCIZIO N. 3.** Sia

$$f(x) = x - \arcsin(1 - |x-1|).$$

(i) Si determinino:

- il dominio di $f$ : $\mathrm{dom} f = [-1, 3]$ ;

$$f(x) = \begin{cases} x - \arcsin x & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ x - \arcsin(2-x) & \text{se } 1 < x \le 3 \end{cases}$$

- $f(-1) = -1 + \frac{\pi}{2}$ $\qquad f(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$ $\qquad f(3) = 3 + \frac{\pi}{2}$
- $f'(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } -1 < x < 1 \\ 1 + \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}} & \text{se } 1 < x < 3 \end{cases}$
- $\lim_{x\to -1} f'(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to 3} f'(x) = +\infty$
- i segni di $f'$ :

$f'(x) < 0$ se $-1 < x < 0 \lor 0 < x < 1$ ; $f'(0) = 0$ ;

$f'(x) > 0$ se $1 < x < 3$ .

- la crescenza, la decrescenza e gli estremi di $f$ :

$f$ è decrescente se $-1 < x < 1$ ; $f$ è crescente se $1 < x < 3$ ;

$\min f = f(1)$ ; $\max f = f(3)$ ; $-1$ è pto di max. rel.

- i segni di $f$ : esiste $\alpha \in \,]1, 3[$ tale che

$f(x) > 0$ se $-1 \le x < 0 \lor \alpha < x \le 3$ ; $f(0) = f(\alpha) = 0$ ;

$f(x) < 0$ se $0 < x < \alpha$ .

(ii) Si utilizzino i risultati precedenti per stabilire il numero delle soluzioni $x \in \mathrm{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

- $t < 1 - \frac{\pi}{2} \lor t > 3 + \frac{\pi}{3}$ : 0 sol.
- $-1 + \frac{\pi}{2} < t \le 3 + \frac{\pi}{2} \lor t = 1 - \frac{\pi}{2}$ : 1 sol.
- $1 - \frac{\pi}{2} < t \le -1 + \frac{\pi}{2}$ : 2 sol.

**ESERCIZIO N. 4.** Si ponga, al variare di $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_x^{x^2} e^t \sin t \, dt.$$

Si determinino :

- $f'(x) =$ $(e^{x^2} \sin x^2)2x - e^x \sin x$

- $\mathrm{ord}_0 f =$ $2$, poiché $f(0) = f'(0) = 0$ e $f''(0) = -1$,

essendo

$$f''(x) = (2x\, e^{x^2} \sin x^2 + 2x\, e^{x^2} \cos x^2)2x + (e^{x^2} \sin x^2)2 -$$
$$- e^x \sin x - e^x \cos x.$$

- $f(2) =$ $\int_2^4 e^t \sin t \, dt = \frac{1}{2} e^2 \left( e^2 (\sin 4 - \cos 4) - \sin 2 + \cos 2 \right)$

si ha :

$$\int_2^4 e^t \sin t \, dt = \left[ e^t \sin t \right]_2^4 - \int_2^4 e^t \cos t \, dt$$
$$= \left[ e^t \sin t \right]_2^4 - \left( \left[ e^t \cos t \right]_2^4 + \int_2^4 e^t \sin t \, dt \right)$$

e quindi

$$\int_2^4 e^t \sin t \, dt = \frac{1}{2}(e^4 \sin 4 - e^2 \sin 2) - \frac{1}{2}(e^4 \cos 4 - e^2 \cos 2)$$

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

**ESERCIZIO N. 5.** Si calcoli

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1 - x^{x \log(x^2)}}{(e^{2x}-1)(\log x)^2}.$$

**RISULTATO**

$-1$

**SVOLGIMENTO**

Poiché $x(\log x)^2 \to 0$ se $x \to 0^+$, si ha

$$\frac{1-x^{x\log(x^2)}}{(e^{2x}-1)(\log x)^2} = \frac{1-e^{2x(\log x)^2}}{2x(\log x)^2}\cdot\frac{2x}{e^{2x}-1} \longrightarrow -1,$$

ricordando che $\frac{e^t-1}{t} \to 1$ se $t \to 0$.