Prova scritta di Analisi matematica I

Corso: OMARI ◯ TIRONI ◯

Sessione autunnale, I appello, a.a. 1999-2000. Trieste, 1 settembre 2000

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

VOTO ______

ESERCIZIO N. 1. Si lanciano contemporaneamente due dadi per cinque volte consecutive e dopo ogni lancio si registra il punteggio. In quanti modi si possono realizzare otto punti in almeno quattro lanci su cinque?

RISULTATO

100.000

SVOLGIMENTO

- In ciascun lancio ci sono 5 modi di realizzare 8 punti : $(2,6)$, $(3,5)$, $(4,4)$, $(5,3)$, $(6,2)$.
- Si possono realizzare 8 punti in 5 lanci su 5 in 5^5 modi.
- Si possono realizzare 8 punti in esattamente 4 lanci su 5 in $\binom{5}{4} \cdot 5^4 \cdot 31$ modi, essendo $\binom{5}{4}$ i modi per scegliere i 4 lanci in cui si realizzano 8 punti, 5^4 i modi per realizzare 8 punti in quei 4 lanci e 31 $(= 36 - 5)$ le possibili uscite in cui non si realizzano 8 punti.
- In conclusione si ha:

$$5^5 + 5^5 \cdot 31 = 5^5 \cdot 2^5 = 10^5$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$

$$E = \mathbb{N} \cup \left\{ \frac{-n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si determinino :

- $\inf E =$ -1
- $\sup E =$ $+\infty$
- i punti di accumulazione di E : $\{-1\}$
- $\mathrm{cl}\, E =$ $E \cup \{-1\}$
- $\mathrm{cl}\,(\mathcal{C}E) =$ $\mathbb{R}$

NB: $\mathrm{cl}\, E$ indica la chiusura dell'insieme E; $\mathrm{int}\, E$ indica la parte interna di E, $\mathrm{fr}\, E$ indica la frontiera di E e $\mathcal{C}E$ il complementare di E.

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Sia
$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + |x|}\,.$$

(i) Si determinino:

- il dominio e i segni di f : $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$;

$f(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0 \ \vee\ x > 0$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \ \vee\ x = 0$;

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+1}{3\sqrt[3]{(x^3+x)^2}} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{3x^2-1}{3\sqrt[3]{(x^3-x)^2}} & \text{se } x < -1 \ \vee\ -1 < x < 0 \end{cases}$
- $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 1$ $\quad \lim_{x\to-1} f'(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x\to0^-} f'(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x\to0^+} f'(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$
- i segni di f' : $(x \neq 0 \wedge x \neq -1)$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{\frac{1}{3}} \ \vee\ x > 0$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$,

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{1}{3}} < x < 0$.

- la crescenza, la decrescenza e gli estremi di f :

f crescente su $]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}[\,\cup\,]0, +\infty[$;

f decrescente su $]-\sqrt{\frac{1}{3}}, 0[$; $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ è pto di max. rel. ;

0 è pto di min. rel. ; $\sup f = +\infty$; $\inf f = -\infty$.

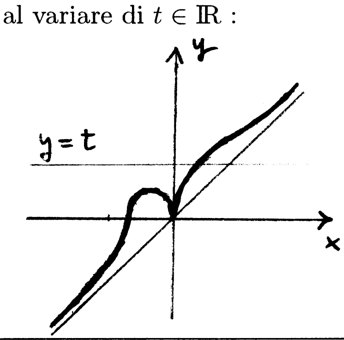
(ii) Si determini l'equazione dell'asintoto di f a $+\infty$ e a $-\infty$:

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} f'(x) = 1$; $\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = 0$;

$y = x$ è l'equazione dell'asintoto a $+\infty$ e a $-\infty$.

(iii) Si determini il numero delle soluzioni $x \in \mathrm{dom}\, f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$:

- $t \in]-\infty, 0[\,\cup\,]\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}, +\infty[$: 1 soluzione ;
- $t \in \{0, \sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}\}$: 2 soluzioni ;
- $t \in]0, \sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}[$: 3 soluzioni .



ESERCIZIO N. 4. Si determini l'espressione esplicita della funzione

$$f(x) = \int_0^1 \left[\frac{d}{dx} \left(\int_x^t t\, e^s ds \right) \right] dt.$$

RISULTATO

$f(x) = -\frac{1}{2} e^x$

SVOLGIMENTO Si ha :

- $\int_x^t t e^s ds = t \left[e^s \right]_x^t = t(e^t - e^x)$,
- $\frac{d}{dx}\left(\int_x^t t e^s ds \right) = -t e^x$,
- $\int_0^1 -t e^x dt = \left[-\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 e^x = -\frac{1}{2} e^x$.

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

ESERCIZIO N. 5. Si calcoli

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot (\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x)\,.$$

RISULTATO

1

SVOLGIMENTO

Si ha (trattandosi di una forma del tipo $\infty \cdot 0$):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x}{x^{-2}} \overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{1}{1+x^2}}{-2x^{-3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(-2x-1)}{-2\left(1+(1+x)^2\right)(1+x^2)} = 1.$$