Esame di Analisi matematica I : esercizi

Corso: OMARI ○ TIRONI ○

A.a. 2000-2001, appello di dicembre.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________

VOTO ________

ESERCIZIO N. 1. Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme dei numeri complessi z tali che

$$z(1-i)+\bar{z}(1+i)=2,$$

dove $\bar{z}$ indica il coniugato del numero complesso z.

RISULTATO

$\{ z = x+iy \; : \; x+y=1 \}$

SVOLGIMENTO

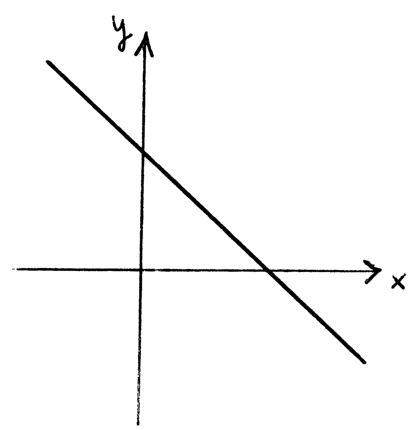
Posto $z = x+iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$z(1-i)+\bar{z}(1+i) = 2 \iff$

$(x+iy)(1-i)+(x-iy)(1+i) = 2 \iff$

$2x+2y = 2 \iff$

$x+y = 1$



ESERCIZIO N. 2. Si provi per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, si ha

$$(1+x^2)^n \geq 1 + n \cdot x^2\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato.

DIMOSTRAZIONE

- La disuguaglianza è vera per $n = 1$.
- Supponiamo la disuguaglianza vera per n e proviamo che è vera per $n+1$:

$$\begin{aligned}(1+x^2)^{n+1} &= (1+x^2)^n (1+x^2) \\ &\geq (1+n x^2)(1+x^2) \\ &= 1 + (n+1) x^2 + n x^4 \\ &\geq 1 + (n+1) x^2 .\end{aligned}$$

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Sia

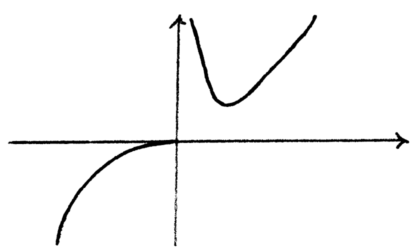
$$f(x) = x \cdot |x| \cdot e^{1/x}.$$

(i) Si determinino:

- il dominio e i segni di f: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $f(x) < 0$ se $x < 0$, $f(x) > 0$ se $x > 0$.
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ $\quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}(1-2x) & \text{se } x < 0, \\ e^{\frac{1}{x}}(2x-1) & \text{se } x > 0 \end{cases}$
- $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$ $\quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$
- i punti di annullamento e i segni di f': $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \frac{1}{2}$; $f'(x) > 0$ se $x \in]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$; $f'(x) < 0$ se $x \in]0, \frac{1}{2}[$.
- la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f: f è crescente su $]-\infty, 0[$; f è decrescente su $]0, \frac{1}{2}[$; f è crescente su $]\frac{1}{2}, +\infty[$; $\inf f = -\infty$; $\sup f = +\infty$; $\frac{1}{2}$ è pto di min. relativo con $f(\frac{1}{2}) = \frac{e^2}{4}$

(ii) Si determini il numero delle soluzioni $x \in \operatorname{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

- $t < 0$: 1 soluzione,
- $0 \leq t < e^2/4$: 0 soluzioni,
- $t = e^2/4$: 1 soluzione,
- $t > e^2/4$: 2 soluzioni



(iii) Si provi che f è concava su $]-\infty, 0[$ e convessa su $]0, +\infty[$. Si ha:

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}(2x^2 + 2x - 1) & \text{se } x < 0, \\ \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}(2x^2 + 2x - 1) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Poichè $f''(x) < 0$ se $x < 0$ e $f''(x) > 0$ se $x > 0$, f è concava su $]-\infty, 0[$ ed è convessa su $]0, +\infty[$.

ESERCIZIO N. 4. Si calcoli

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^3} t\cdot\cos(t^2)\,dt}{x^6}.$$

RISULTATO

$\frac{1}{2}$

SVOLGIMENTO

Si ha, per la regola di de L'Hospital (caso $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^3} t\cos(t^2)\,dt}{x^6} = \frac{1}{2} \overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x\to 0} \frac{x^3\cdot\cos(x^6)\cdot 3x^2}{6x^5} = \frac{1}{2}$$

COGNOME e NOME ______________________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 5. Sia

$$f(x) = \frac{x-1}{x(x^2+1)}.$$

(i) Si determinino:

- $\mathrm{Ord}_{0^+} f = 1$
- $\mathrm{ord}_{+\infty} f = 2$

(ii) Si calcoli una primitiva di f su $]0, +\infty[$.

Si ha:

$$\frac{x-1}{x(x^2+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

e quindi una primitiva di f su $]0,+\infty[$ è

$$-\log x + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \operatorname{arctg} x = \log\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \operatorname{arctg} x$$

(iii) Si calcoli $\int_0^1 f(x)\,dx$.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 f(t)\,dt = \lim_{x\to 0^+}\left(\log\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} - \log\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \operatorname{arctg} x\right)$$

$$= -\infty$$

(iv) Si calcoli $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left(\log\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \operatorname{arctg} x - \log\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}$$