Università di Trieste - Facoltà d'Ingegneria

Corsi di Laurea in Ingegneria Chimica, Elettrica, Elettronica, dei Materiali

Programma di Analisi Matematica I

Anno Accademico 2000-2001

Prof. Pierpaolo Omari

***Elementi di logica.** Proposizioni. Operazioni logiche: negazione, congiunzione, disgiunzione, implicazione, doppia implicazione. Proprietà delle operazioni logiche. Predicati. Quantificatori. Regole di negazione.

***Elementi di teoria degli insiemi.** Concetto di insieme. Elementi e appartenenza. Inclusione. Operazioni fra insiemi: intersezione, unione, differenza, complementare e relative proprietà. Ripartizioni. Applicazioni fra insiemi e loro proprietà: suriezioni, iniezioni, biiezioni; immagine e controimmagine; applicazione identica e di inclusione; restrizioni e prolungamenti; composizione; inversione. Successioni e sottosuccessioni. Insieme prodotto. Relazioni binarie. Grafico di una relazione e di un'applicazione. Relazioni di equivalenza. Classi di equivalenza. Relazioni d'ordine.

Insiemi numerici. Proprietà algebriche dei numeri reali: **R** è un corpo commutativo. Proprietà d'ordine dei numeri reali: **R** è un corpo ordinato. Equazioni e disequazioni. L'insieme **N** dei numeri naturali. Principio di induzione e definizione per ricorrenza. L'insieme **Z** dei numeri interi relativi. L'insieme **Q** dei numeri razionali. La retta reale. Insufficienza dei numeri razionali. Proprietà di continuità dei numeri reali: classi separate e contigue e proprietà di Dedekind. Limitazioni inferiori e superiori. Massimo e minimo. Estremo superiore e inferiore e proprietà caratteristiche. Teorema di esistenza dell'estremo superiore. Radice n-esima in **R**. Valore assoluto e sue proprietà. Intervalli in **R**. Proprietà di Archimede. Densità di **Q** in **R**. Teorema di Cantor sugli intervalli incapsulati. Rappresentazione in base 10 di un numero reale, in particolare la rappresentazione dei numeri naturali e dei numeri razionali. Parte intera di un numero reale. Approssimazioni per eccesso e per difetto di un numero reale. Potenza con esponente naturale, intero, razionale, reale e relative proprietà. Il numero *e* di Nepero. L'insieme **C** dei numeri complessi. Proprietà algebriche. Coniugio e modulo. Rappresentazione polare. Radici n-esime.

Elementi di calcolo combinatorio. Permutazioni. Disposizioni e combinazioni semplici. Formula di Newton. Proprietà dei coefficienti binomiali. Formula di Leibniz.

Proprietà metriche di R. Distanza euclidea in **R**. Intorni di un punto e proprietà relative. Intorni di $+\infty$, di $-\infty$ e di ∞. Punti di accumulazione. Punti isolati. Teorema di Bolzano-Weierstrass (senza dim.). Punti interni, esterni e di frontiera. Interno, chiusura e frontiera di un insieme e relative proprietà. Insiemi aperti e chiusi e relative proprietà. Successioni e sottosuccessioni. Successioni definite per ricorrenza. Il concetto di limite per una successione di numeri reali: motivazioni e definizione formale. Insiemi connessi e insiemi compatti.

Funzioni da R in R. Funzioni e loro proprietà. Operazioni con le funzioni a valori reali. Parte positiva e negativa di una funzione, modulo, massimo e minimo. Funzioni monotone. Funzioni periodiche, pari, dispari. Proprietà delle principali funzioni elementari: funzioni razionali intere e fratte, polinomi e principio d'identità, fattorizzazione di un polinomio a coefficienti reali (senza dim.), funzioni trigonometriche e loro inverse, funzione esponenziale e funzione logaritmo (proprietà algebriche e topologiche), funzione potenza, funzioni iperboliche.

Funzioni continue da R in R. Motivazioni. Continuità in un punto. Definizioni equivalenti. Funzioni discontinue. Continuità della restrizione e della composta. Caratterizzazione della continuità con le successioni. Continuità su un insieme. Teorema di compattezza. Teorema di Weierstrass. Teorema di connessione e sue conseguenze: teorema degli zeri, metodo di bisezione e applicazioni alla soluzione di equazioni. Proprietà delle funzioni continue : teorema della permanenza del segno, teorema di limitatezza locale, continuità della somma, del prodotto, della combinazione lineare, della reciproca e del quoziente. Continuità dell'inversa di una funzione monotona definita su un intervallo. Continuità delle principali funzioni elementari. Funzioni uniformemente continue. Teorema di Heine (senza dim.).

Limiti di funzioni da R in R. Motivazioni. Definizione di limite. Teorema di unicità. Limite della restrizione. Caratterizzazione dei limiti con le successioni. Limite della funzione composta e applicazioni. Limite destro e sinistro, limite infinito e all'infinito. Teoremi sui limiti: permanenza del segno, limite della somma, del prodotto, della reciproca. Teorema sul limite delle funzioni monotone. Discontinuità delle funzioni monotone. Limiti notevoli.

Calcolo differenziale per funzioni da R in R. Motivazioni. Rapporto incrementale. Derivata. Derivata destra e sinistra. Derivate di ordine superiore. Derivata della somma, del prodotto, della combinazione lineare, della reciproca e del quoziente. Gli spazi $C^k(I)$ e $C^\infty(I)$ e l'applicazione di derivazione. Derivabilità e continuità. Approssimante lineare e differenziale. Retta secante e retta tangente. Derivata della funzione composta. Derivata della funzione inversa. Derivate delle principali funzioni elementari. Proprietà locali del primo ordine: crescenza e decrescenza locale, massimi e minimi relativi. Condizioni sulla derivata. Punti di estremo e punti critici: teorema di Fermat. Teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange e conseguenze. Relazioni tra crescenza locale e globale (senza dim.). Teoremi di de L'Hospital (dim. nel caso 0/0). Forme indeterminate. Teorema sul limite della derivata. Proprietà locali del secondo ordine: concavità e convessità locali. Funzioni concave e convesse su un intervallo. Relazioni reciproche (senza dim.). Punti di flesso. Condizioni sulle derivate successive. Test della derivata seconda per l'esistenza di estremi.

Confronto locale di funzioni da R in R. Motivazioni. Infiniti e infinitesimi. Infiniti equivalenti e ordini di infinito. Ordinamento tra ordini di infinito. Infiniti reali, soprareali, sottoreali e infrareali. Operazioni tra ordini di infinito. Principio di sostituzione. Lo stesso per gli infinitesimi. La notazione "*o*" di Landau.

Approssimazione locale di funzioni da R in R. Motivazioni. Lemma di Lagrange (senza dim.). Lemma di Peano e applicazioni alla valutazione dell'ordine di infinitesimo. La formula di Taylor per i polinomi. Teorema di Taylor. Resto nella forma di Peano e di Lagrange. Sviluppi delle principali funzioni elementari. Applicazioni all'approssimazione numerica locale e globale di una funzione.

Teoria dell'integrazione per funzioni da R in R. Motivazioni. Decomposizioni e proprietà relative. Somme inferiori e superiori e proprietà relative. Integrale di Riemann-Darboux di una funzione limitata su un intervallo compatto. Interpretazione geometrica. Formulazione equivalente dell'integrabilità. Integrabilità delle funzioni continue e monotone. Proprietà dell'integrale: linearità, monotonia e additività rispetto al dominio. Integrabilità del valore assoluto di una funzione, del prodotto di due funzioni e della restrizione. Teorema della media integrale. Integrale orientato. Regola di Chasles. Funzioni localmente integrabili su un intervallo. Funzione integrale e sua continuità. Teorema fondamentale del calcolo. Primitiva di una funzione. Teorema di Torricelli. Regole d'integrazione per parti e per sostituzione. Integrale indefinito. Regole d'integrazione indefinita. Integrazione indefinita delle funzioni razionali con il metodo di Hermite (senza dim.) e applicazioni all'integrazione di alcune classi di funzioni irrazionali e trascendenti.

Integrale in senso generalizzato per funzioni da R in R. Motivazioni. Integrale generalizzato di una funzione localmente integrabile. Funzioni campione. Criterio del confronto per l'integrabilità in senso generalizzato. Criteri dell'ordine di infinito e di infinitesimo per l'integrabilità in senso generalizzato. Assoluta integrabilità e integrabilità in senso generalizzato.

Gli argomenti contrassegnati con l'asterisco * sono stati svolti in modo sistematico e dettagliato nel precorso e poi richiamati durante il corso all'occorrenza.

BIBLIOGRAFIA

- Dispense disponibili in rete.
- M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, Matematica , Calcolo infinitesimale e algebra lineare, Zanichelli, Bologna, 2000.
- G. Prodi, Analisi Matematica, Boringhieri, Torino, 1970.
- M. Dolcher, Elementi di Analisi Matematica, Lint, Trieste, 1991.
- R.A. Adams, Calcolo differenziale 1 e 2, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1992.

Trieste, 20.12.2000