Corso di laurea Matematica
Algebra 2
a.a. 2021–22
Scritto 9 febbraio 2022

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Provare che il polinomio $x^5 + 15x^4 + 30x^2 + 45$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$. Dire se è irriducibile anche in $\mathbb{R}[x]$.

2. Sia G un gruppo e siano H e K due suoi sottogruppi normali. Provare che l'applicazione $\phi : G \longrightarrow G/H \times G/K$ data da $\phi([g]_H, [g]_K)$ è un omomorfismo di gruppi.

3. Sia L un campo, estensione di un campo K e sia $a \in L$. Sia $f(x) \in K[x]$ un polinomio irriducibile in $K[x]$ tale che $f(a) = 0$. Sia α il coefficiente direttivo di $f(x)$. Provare che $f(x)/\alpha$ è il polinomio minimo di a su K.

4. Sia K un campo, $a \in K$ un elemento non nullo fissato e si consideri l'omomorfismo $\phi : K[x] \longrightarrow K[x]$ che lascia fissi gli elementi di K e tale che $\phi(x) = ax$. Provare che ϕ è un isomorfismo di anelli.

5. Sia $A = \mathbb{Z}_4[x]/(x^2)$. Quanti elementi ha l'anello A? Indicare tutti gli elementi di A che sono invertibili.