

**Corso di laurea Matematica**  
**Algebra 2**  
**a.a. 2018–19**  
**Scritto 24 settembre 2019**

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia  $G$  un gruppo con 77 elementi. Quanti sono i sottogruppi normali di  $G$ ?
2. Trovare tutti gli elementi invertibili e i divisori dello zero dell'anello prodotto  $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ .
3. Si consideri il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 7 & (\text{mod } 10) \\ x \equiv 7 & (\text{mod } 13) \\ x \equiv 7 & (\text{mod } 17) \end{cases}$$

Quante soluzioni  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $0 < x \leq 10000$ , ha il sistema?

4. Sia  $a \in \mathbb{C}$  algebrico su  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ . Provare che allora  $a$  è algebrico anche su  $\mathbb{Q}$ .
5. Sia  $K$  un campo finito con 9 elementi. Provare che in  $K$  esiste un elemento  $a$  tale che  $a^3 + a^2 + a + 1 = 0$ . A quale campo “facile da rappresentare” è isomorfo  $K$ ?