Corso di laurea Matematica
Algebra 2
a.a. 2019–20
Scritto 23 giugno 2020

Partecipando a questa sessione di esame, accetto di rispettare le seguenti norme di comportamento:

- Le risposte all'esame saranno svolte solo da me.
- Non renderò disponibili a nessun altro le mie risposte.
- Mi impegno a non consultare persone o materiali di qualsiasi tipo (libri, appunti, siti, ...).

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Siano G_1 e G_2 due gruppi e sia $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$ un monomorfismo di gruppi. Provare che se G_2 è abeliano, allora anche G_1 lo è.

2. Sia A un anello commutativo unitario. Siano I e J due ideali principali di A. Ricordando che IJ indica l'ideale generato dall'insieme
$$\{ab \mid a \in I,\ b \in J\},$$
provare che IJ è principale.

3. Sia K un campo e $f(x), f(x) \in K[x]$ due polinomi e sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $\deg(f) \leq n$, $\deg(g) \leq n$. Supponiamo inoltre che esistano $a_0, \ldots, a_n \in K$ a due a due distinti tali che $f(a_i) = g(a_i)$ $(\forall i \in \{0, \ldots, n\})$. Provare che $f(x) = g(x)$.

4. Sia $a \in \mathbb{C}$ algebrico su $\mathbb{Q}$. Provare che anche $a^2 + a + 1$ è algebrico su $\mathbb{Q}$. Più in generale, data un'estensione $L : K$, se $a \in L$ è algebrico su $\mathbb{Q}$, provare che, se $f(x) \in K[x]$ è un qualunque polinomio, anche $f(a)$ è algebrico su K.