

**Corso di laurea Matematica**  
**Algebra 2**  
**a.a. 2020–21**  
**Scritto 22 settembre 2021**

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Provare che l'ideale  $I = (x - 3, y - 2) \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$  è un ideale primo ma non massimale. Trovare un ideale massimale che lo contiene.
2. Usando il metodo di Berlekamp, fattorizzare il polinomio:

$$f(x) = x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x].$$

3. Provare che  $7n^{21} + 3n^{11} + n + 121$  è divisibile per 11 per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ .
4. Sia  $G$  un gruppo tale che  $a^2 = 1$  per ogni  $a \in G$ . Provare che  $G$  è abeliano.
5. Sia  $a \in \mathbb{C}$  algebrico su  $\mathbb{Q}$ . Provare che  $a^2 + 1$  è algebrico su  $\mathbb{Q}$ .