Corso di laurea Matematica
Algebra 2
a.a. 2018–19
Scritto 22 gennaio 2019

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Sia $C_2 = \{1, a\}$ il gruppo moltiplicativo ciclico di ordine 2 (quindi $a^2 = 1$) e sia $G = C_2 \times S_3$ (dove S_3 è il gruppo delle permutazioni di 3 elementi). Trovare tutti i 2-sottogruppi di Sylow di G. Mostrare che il loro numero è coerente con quanto previsto dai teoremi di Sylow.

2. Dire quanti fattori irriducibili ha il polinomio:
$$x^9 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$$
e trovare tali fattori (il risultato va ottenuto utilizzando il metodo di Berlekamp).

3. Dire se l'ideale $(x-2, y^2-3) \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$ è massimale e giustificare la risposta.

4. Sia K un campo e L una sua estensione. Provare che se $a \in L$ è algebrico su K, allora $a - 1$ è anche algebrico su K. Se il polinomio minimo di a su K ha grado n, che grado ha il polinomio minimo di $a - 1$ su K?

5. Sia A un anello commutativo unitario, tale che $a^3 = a$ per ogni $a \in A$. È vero che allora in A ogni ideale primo è anche massimale?